

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Кафедра телевидения и управления

М.И. Курячий

**ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА
СИГНАЛОВ**

Учебное методическое пособие

2012

Курячий М.И.

Цифровая обработка сигналов: Учебное методическое пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2012. – 73 с.

Учебное методическое пособие по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» предназначено для студентов, обучающихся с использованием дистанционных технологий обучения, и содержит методические указания по организации самостоятельной работы при изучении данной дисциплины.

Приведены примеры решения задач, организация выполнения лабораторного практикума, контрольных работ и курсового проекта.

© Курячий Михаил Иванович, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Содержание учебно-методического и программного обеспечения.....	5
2. Список рекомендуемой литературы.....	6
3. Организация выполнения лабораторного практикума.....	7
3.1. Требования к персональному компьютеру и программному обеспечению для выполнения лабораторного практикума.....	8
3.2. Особенности выполнения лабораторных работ.....	12
3.2.1. Особенности выполнения лабораторной работы № 1	12
3.2.2. Особенности выполнения лабораторной работы № 2	13
3.2.3. Особенности выполнения лабораторной работы № 3	13
3.2.4. Особенности выполнения лабораторной работы № 4 (разделы 1, 2, 3).....	14
3.3. Оформление отчетов.....	14
4. Организация выполнения контрольных работ.....	15
4.1. Контрольная работа №1	16
4.1.1. Основные формулы для анализа характеристик ЦФ	16
4.1.2. Примеры решения задач.....	19
4.1.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №1).....	21
4.2. Контрольная работа № 2	26
4.2.1. Основные формулы для исследования эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка (ЦРФ2П)	26
4.2.2. Устойчивость ЦРФ2П.....	28
4.2.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №2).....	31
4.3. Контрольная работа № 3	33
4.3.1. Примеры решения задач по цифровой обработке изображений.....	33
4.3.2. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №3).....	36
5. Методические указания по курсовому проектированию	45
5.1. Варианты индивидуальных заданий.....	45
5.2. Основные формулы для синтеза цифровых фильтров	47
5.3. Примеры расчетов и оформления курсового проекта	49
5.3.1. Синтез цифрового фильтра Баттерворта методом инвариантного преобразования ИХ.....	49
5.3.2. Синтез ЦФ методом отображения дифференциалов	51
5.3.3. Синтез ЦФ методом билинейного преобразования	52
5.3.4. Синтез ЦФ по методу Z-форм.....	53
5.3.5. Преобразование частотных свойств ЦФ.....	55
5.3.5.1. Преобразование ФНЧ в ФНЧ1	55
5.3.5.2. Преобразование ФНЧ в ФВЧ.....	57
5.3.5.3. Преобразование ФНЧ в ПФ	59
5.3.6. Нахождение нулей и полюсов.....	61

5.3.7. Проверка условия устойчивости фильтра	62
5.3.8. Расчет первых 10 отсчетов импульсной и переходной характеристик, выражение для системной функции и АЧХ ЦФ	63
5.3.9. Структурная схема фильтра для прямой и канонической форм реализации.....	65
5.3.10. Алгоритм обработки фильтра для прямой и канонической форм реализации и объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала	66
5.3.11. Расчет среднеквадратического значения шума квантования всех источников	66
5.3.12. Изменение значений нулей, полюсов и частотной характеристики при изменении коэффициентов ЦФ.....	71

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов» (ЦОС) объединяет в себе новые фундаментальные идеи по обработке одномерных и двумерных сигналов с высокими технологиями их реализации на базе цифровых сигнальных процессоров. Задачей дисциплины ЦОС является обеспечение подготовки студентов в области обработки сигналов в радиотехнических системах и устройствах, в том числе аудио- и видеосигналов на основе:

- изучения математических методов и алгоритмов, применяемых в современных и перспективных цифровых устройствах обработки сигналов;
- ознакомление с принципами и средствами реализации алгоритмов ЦОС и элементами систем проектирования.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- методы и средства дискретизации и квантования сигналов и ошибки, порождаемые этими процессами;
- методы построения линейных одномерных и двумерных систем обработки дискретных и цифровых сигналов, характеристики таких систем;
- методы синтеза цифровых устройств обработки сигналов;
- особенности построения, основные характеристики цифровых процессоров обработки сигналов и принципы проектирования систем на их основе.

Студент должен уметь:

- анализировать частотные, временные и точностные характеристики систем ЦОС;
- рассчитывать передаточные системные функции цифровых фильтров (ЦФ);
- синтезировать цифровые фильтры с заданными временными, частотными и точностными характеристиками;
- проектировать ЦФ на базе цифровых сигнальных процессоров;
- пользоваться пакетами прикладных программ.

1. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В комплект учебно-методического и программного обеспечения (УМПО) по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» входят:

- учебное пособие;
- лабораторный практикум для выполнения 6 компьютерных работ;
- данное учебное методическое пособие;
- компакт-диск с компьютерными обучающими программами (КОП) к лабораторному практикуму.

По учебным планам дисциплина ЦОС изучается студентами следующих специальностей:

- 210312 «Аудиовизуальная техника» с отчетностью – 4 лабораторных работы, 3 контрольных работы, экзамен, курсовой проект;
- 210303 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура» с отчетностью – 4 лабораторных работы, 3 контрольных работы, экзамен, курсовой проект;
- 100101 «Сервис» (специализация – «Сервис электронных систем безопасности») с отчетностью 4 лабораторных работы, 3 контрольных работы, экзамен, курсовой проект;
- 210302 «Радиотехника» с отчетностью – 4 лабораторных работы, 3 контрольных работы, экзамен.

К основным разделам дисциплины ЦОС, по которым студент проходит итоговую аттестацию (сдает экзамен), относятся следующие вопросы:

1. Математическое описание цифровых сигналов и систем.
2. Цифровые фильтры и их характеристики, формы реализации и примеры построения цифровых фильтров.
3. Квантование сигналов, коэффициентов фильтра и результатов вычислений при ЦОС. Методы уменьшения ошибок квантования и округления данных.
4. Методы синтеза цифровых фильтров по заданному аналоговому фильтру-прототипу или временным, либо частотным характеристикам.
5. Преобразования частотных характеристик ЦФ. Методы синтеза цифровых фильтров с КИХ.
6. Цифровая обработка изображений. Двумерные линейные фильтры. Рекурсивная обработка изображений.
7. Нелинейная (ранговая) обработка изображений. Интерполяция и децимация двумерных сигналов.
8. Специализированные устройства для цифровой фильтрации данных. Аппаратное построение цифровых фильтров с КИХ и БИХ.
9. Цифровое сжатие видеосигналов. Пространственная и временная избыточность. Внутрикадровое кодирование.
10. Стандарты MPEG. Двухнаправленное кодирование. Типы данных и структура цифрового потока.

2. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Список литературы, необходимый для успешного освоения дисциплины «Цифровая обработка сигналов», приведен в учебном пособии по ЦОС и в каждом из 6 описаний работ лабораторного практикума. Учитывая то, что не все литературные источники будут доступны студентам, приведем сокращенный список литературы, состоящий в основном из ранее изданных учебных пособий и задачников [1-5].

Основная литература

1. Курячий М.И. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов с грифом УМО. – Томск: ТУСУР, 2009. – 190 с. – ISBN 978-5-86889-286-8. – 60 экз. (анл (5), счз1 (3), счз5 (2), аул (50)).
2. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер; пер.: С.А. Кулешов; ред. пер.: А.С. Ненашев. – М.: Техносфера, 2006. – 855 с. – 70 экз. (анл (8), счз1 (1), счз5 (1), аул (60)).

Дополнительная литература

3. Цифровая обработка изображений: пер. с англ. / Р.С. Гонсалес, Р.Э. Вудс; пер. П.А. Чочиа. – М.: Техносфера, 2005. – 1070 с. – ISBN 5-94836-028-8. – 11 экз. (анл (3), счз1 (1), счз5 (1), аул (6)).
4. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB: Пер. с англ. / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс; пер. : В.В. Чепыжов. – М.: Техносфера, 2006. – 615 с. – ISBN 5-94836092-X. – 30 экз. (анл (5), счз1 (1), счз5 (1), аул (23)).
5. Цифровое телевидение в видеоинформационных системах: монография / А.Г. Ильин, Г.Д. Казанцев, А.Г. Костевич, М.И. Курячий, И.Н. Пустынский, В.А. Шалимов. – Томск: ТУСУР, 2010. – 465 с. – ISBN 978-5-86889-540-1. – 50 экз. (анл (5), счз1 (3), счз5 (2), аул (40)).

3. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА

Лабораторный практикум состоит из четырёх лабораторных работ. В соответствии с учебными планами по специальностям 210312 «Аудиовизуальная техника», 210303 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура», 100101 «Сервис» (специализация – «Сервис электронных систем безопасности») и специальности 210302 «Радиотехника» необходимо выполнить четыре лабораторные работы. Каждая лабораторная работа имеет теоретическую часть, описывающую основные понятия. Однако перед ее прочтением следует изучить соответствующие разделы учебного пособия и дополнительную литературу по теме выполняемой работы. Полученные таким образом знания необходимо будет применить как при выполнении практической части работы, так и при составлении выводов.

Кроме теоретической части каждая работа имеет практическую часть, описывающую задания, а также порядок и способы их выполнения. Перед выполнением этой части следует внимательно и полностью ее прочесть и прояснить для себя все непонятные моменты.

Ниже приведены названия лабораторных работ:

№ 1. «Анализ характеристик цифровых фильтров для обработки одномерных сигналов».

№ 2. «Синтез цифровых фильтров для обработки одномерных сигналов».

№ 3. «Цифровая обработка двумерных сигналов».

№ 4 (раздел 1). «Цифровая линейная фильтрация изображений».

№ 4 (раздел 2). «Цифровая нелинейная обработка изображений».

№ 4 (раздел 3). «Цифровые методы коррекции изображений».

3.1. Требования к персональному компьютеру и программному обеспечению для выполнения лабораторного практикума

Первые две работы выполняются в системе математического моделирования MathCAD 6.0 фирмы MathSoft Inc, поэтому требования к используемому для выполнения лабораторных работ персональному компьютеру обусловлены требованиями этой системы, а именно:

- персональный PC-совместимый компьютер на основе процессоров фирмы Intel (начиная с 80486) или совместимых. Арифметический сопроцессор не обязателен, но его наличие существенно увеличивает производительность ПК;

- не менее 8 Мбайт оперативной памяти для работы системы MathCAD и объем оперативной памяти в 16 – 32 Мбайт для нормального функционирования операционной системы Windows, а именно, 8 Мбайт для Windows 95, не менее 16 Мбайт для Windows NT 4.0, как минимум, 32 Мбайта для Windows 98;

- жесткий диск емкостью не менее чем 20 Мбайт свободного пространства для файлов системы MathCAD;

- дополнительные 3 Мбайта свободного пространства на том диске (или разделе диска), на котором установлена операционная система Windows;

- не менее 12 Мбайт виртуальной памяти для свопинга. Задание объема виртуальной памяти описано в руководстве пользователя Windows;

- монитор и видеокарта, совместимые с Windows и способные поддерживать палитру не менее 256 цветов;

- мышь, работающая под Windows.

На используемом компьютере также должно быть установлено следующее программное обеспечение:

- Windows 95 или более поздняя версия, или Windows NT версии 4.0, или более поздней;

- текстовый процессор Word 7 (Word 95) для чтения электронной версии методических указаний к лабораторным работам;

- система MathCAD версии 6.0 или более поздней;

- утилита arj.exe для разархивации файлов описания лабораторных работ.

Третья лабораторная работа выполняется на персональном компьютере под управлением операционной системы Windows (основной вариант), дисковой операционной системой DOS или при выгруженной графической оболочке Windows (желательный вариант). Это связано с тем, что лабораторная работа содержит исполняемые утилиты, первоначально разработанные

под дисковую операционную систему DOS. К ним относятся утилиты просмотра изображений, суммирования-вычитания и набора статистики и т.д.:

```
Содержимое каталога C:\YI
10.08.02  15:08          <КАТАЛОГ>      .
10.08.02  15:08          <КАТАЛОГ>      ..
01.12.95  17:37                51 892 CUT.EXE
01.06.99  07:03                15 579 EDIT.EXE
01.12.95  17:35                38 234 FIR.EXE
01.12.95  17:35                56 334 NORM.EXE
01.12.95  17:35                52 720 PT.EXE
01.12.95  17:34                28 285 RANG.EXE
01.12.95  17:36                50 037 STAT.EXE
01.12.95  17:35                34 136 SUM.EXE
          10 файл(а, ов)      327 217 байт
```

Для установки лабораторной работы №3 по основному варианту в Windows запускается файл Startlab.bat из папки на CD L:\LAB3_WIN:

```
if not exist c:\ goto M1
set path=c:\lab3\bat;c:\lab3\bin;%path%
set yi=c:\lab3\bin
lab3.exe -y c:\
c:
goto M3
:M1
set path=d:\lab3\bat;d:\lab3\bin;%path%
set yi=d:\lab3\bin
lab3.exe -y d:\
d:
:M3
cd \lab3
if not exist «c:\Program Files\Far\Far.exe» goto M4
«c:\Program Files\Far\Far.exe»
goto endlab
:M4
if not exist «d:\Program Files\Far\Far.exe» goto M5
«d:\Program Files\Far\Far.exe»
goto endlab
:M5
vc
:endlab
```

В результате установки и само разархивации файла lab3.exe должна появиться папка C:\lab3. Ее содержимое:

```
Содержимое каталога C:\lab3
10.08.02  14:58      <КАТАЛОГ>      .
10.08.02  14:58      <КАТАЛОГ>      ..
10.08.02  14:58      <КАТАЛОГ>      BAT
10.08.02  14:58      <КАТАЛОГ>      bin
11.12.96  15:09                65 408 IM.DAT
07.12.99  18:05                346 112 LAB_3.DOC
05.02.96  09:12                65 408 LENA.DAT
11.12.96  15:10                65 408 N.DAT
11.12.96  15:55                110 720 TV.DAT
9 файл (а, ов)                653 056 байт
```

Работа готова к выполнению.

По второму варианту каталог LAB3_DOS с CD переписывается сначала на дискету (привод а:), а затем запускается файл a:\LAB3_DOS\startup.bat. Затем компьютер перезагружается в режиме эмуляции MS-DOS и запускается файл c:\LAB3\BAT\lab3m.bat. Лабораторная работа готова к выполнению. В каталоге LAB3_DOS имеется справка readme.txt. Ее содержание:

1. Запустить с дисковода а:\LAB3_DIS\Setup.bat
Появятся каталоги: c:\BAT; c:\DSP; c:\LAB3;
c:\YI и архив с описанием LP в Word97:
c:\LAB_3.arj
В файле autoexec.bat появятся новые строки:
path=c:\bat; c:\yi; ...
set yi=c:\yi
2. Перезагрузить компьютер (лучше в режиме эмуляции MS-DOS)
3. Запустить bat-файл: c:\BAT\lab3m.bat
При этом появятся все необходимые файлы в c:\LAB3*.*
4. Если нет nc.exe, запустить vs.exe или работать в режиме командной строки.
Лабораторную работу проделать в директории c:\LAB3
5. Новую лабораторную работу начинать с п.3

Четвертая лабораторная работа (разделы 1, 2, 3) выполняется самостоятельно посредством имеющихся BAT и EXE файлов в соответствующих каталогах. Прежде чем выполнять эту работу, следует внимательно прочесть все текстовые файлы, имеющиеся в соответствующих каталогах. Отчётность производится по результатам выполнения всех трёх разделов лабораторной работы.

Требования к компьютеру:

- IBM PC совместимый компьютер с процессором 80486 и выше;
- 10 Мб свободного пространства на жестком диске;
- 32 Мб и выше оперативной памяти (зависит от типа используемой ОС);
- видеодаптер с поддержкой отображения 16 млн. цветов и разрешения экрана 640x480;
- ОС: Windows 95, Windows 98, Windows NT 4.0, Windows 2000.

Внимание!

Для работы с ОС Windows NT 4.0, Windows 2000 пользователь должен иметь права Администратора системы или привилегированного пользователя. В процессе работы программ создаются временные директории в директории WINNT, которые необходимы для работы программ. Обычные пользователи обычно не имеют прав для создания файлов или директорий в директории WINNT.

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММ

Исполняемые файлы для лабораторной работы №4 (разделы 1, 2, 3, соответственно) имеют следующие названия:

- Labor1.exe;
- Labor2.exe;
- Labor3.exe.

Каждая программа лабораторной работы располагается в своей директории, внутри которой находятся:

- файлы компонентов программы;
- исполняемый файл программы, например Labor1.exe;
- файл конфигурации программы, например Labor1.ini;
- поддиректория «Bin» - файлы описания и файлы изображений;
- поддиректория «Xtras» - файлы компонентов программы.

УСТАНОВКА ПРОГРАММ

Установка лабораторных программ производится простым копированием всей директории, содержащей лабораторную работу на жесткий диск компьютера.

Внимание!

Если копирование файлов производится с CD-ROM, по окончании процедуры копирования необходимо сбросить файловый атрибут «Read only» или «Только для чтения» для всех скопированных файлов, в том числе и файлов находящихся в поддиректориях. По умолчанию, все файлы находящиеся на CD-ROM имеют установленный атрибут и при копировании на жесткий диск этот атрибут остается установленным.

НАСТРОЙКА ПРОГРАММ

Для настройки используется текстовый файл конфигурации, который имеет имя, как у исполняемого файла, и расширение *.ini (например Labor1.ini), файл конфигурации и исполняемый файл располагаются в одной и той же директории. Для настройки программы необходимо открыть файл конфигурации в любом текстовом редакторе (например, в блокноте), и отыскать в нем следующие строки:

```
[FileLocationPath]
C:\Lab1
```

Во второй из найденных строк необходимо указать абсолютный путь к директории, куда скопирована (установлена) лабораторная работа, так как указано выше. После правки файла необходимо сохранить изменения.

В примере выше директория с лабораторной работой №4 была скопирована на локальный диск C: в директорию Lab1.

ЗАПУСК ПРОГРАММ

Для запуска программы необходимо открыть соответствующую папку и дважды кликнуть по исполняемому файлу для запуска программы.

Для упрощения запуска лабораторных работ можно создать на «Рабочем столе» компьютера ярлык для исполняемого файла. Для справки по созданию ярлыка обратитесь к помощи операционной системы.

3.2. Особенности выполнения лабораторных работ

Все лабораторные работы желательно выполнять под руководством преподавателя, знающего как цифровую обработку сигналов и изображений, так и пакеты прикладных программ MathCAD, OTHEWARE. При самостоятельном выполнении лабораторных работ, прежде всего, нужно изучить пакет MathCAD, например, по литературе [8] и, особенно, работу символьного процессора [9, 10]. Знание пакета MathCAD необходимо для выполнения первой и, особенно, второй лабораторных работ.

3.2.1. Особенности выполнения лабораторной работы №1

Собственно работа начинается с пункта 2. Определенную трудность представляет нахождение численных значений коэффициентов цифровых фильтров a_i , b_j .

Для этого представим системную функцию в виде:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N b_j z^{-j}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \dots}$$

и сравним соответствующие

коэффициенты с заданными в таблице. Не перепутайте знаки у коэффициентов b_j !

По пункту 3 сделайте все 5 заданий, то есть исследуйте фильтры Баттерворта, Чебышева, Бесселя, резонатор и режекторный фильтр.

Дискретизировать сигнал по пункту 5 нужно следующим образом. Для примера возьмем инверсный сигнал по варианту 2. Его дискретный аналог на пять точек имеет вид: $x(n) = 1/5\delta(n-1) + 2/5\delta(n-2) + 3/5\delta(n-3) + 4/5\delta(n-4) + \delta(n-5)$, $n \geq 0$. Шестую точку при $n = 0$ исключаем, как не значимую. Дискретизируем и исследуем все 5 пять вариантов сигналов.

В пункте 6 сравните рассчитанное и экспериментальное значение дисперсии при одном значении коэффициента сглаживания $K = 0,1 \dots 0,9$.

Выполнение остальных пунктов, как правило не вызывает затруднений.

3.2.2. Особенности выполнения лабораторной работы №2

По пункту 2 обязательно измените центральную частоту, добротность контура и частоту дискретизации режекторного фильтра из заданных диапазонов изменения параметров. При каких соотношениях частот исследуемые методы синтеза работают хорошо, а при каких плохо? Поясните это в выводах к лабораторной работе.

В пунктах 4-6 сделайте все пять вариантов заданий, а по пунктам 7, 8 выберете один из синтезированных фильтров НЧ.

Ключевым пунктом лабораторной работы является пункт 5 - синтез цифрового фильтра. Его нужно сделать особенно тщательно! Результатом синтеза являются численные значения коэффициентов k_o , a_i , b_j . Проверка правильности синтеза осуществляется в пункте 6. Частотные характеристики исходного ФНЧ должны совпадать с частотными характеристиками, полученными по пункту 4. Если это не так, сделайте пункт 5 заново!

Изменение и восстановление коэффициентов b_j по пункту 7 производится автоматически. Необходимо лишь в случае каждого фильтра подобрать свою величину ε , первоначально равную $\varepsilon = -2,5 \%$, так, чтобы максимальное отклонение АЧХ от исходной составляло порядка 10 – 20 %. Зарисовать полученные характеристики. Аналогично в пункте 8 выбирается число разрядов дробной части, первоначально равное $n = 4$.

3.2.3. Особенности выполнения лабораторной работы №3

Работу №3 лучше всего выполнять в операционной системе DOS или при выгруженной графической оболочке Windows. Предварительно изучите работу дисковой операционной системы DOS в режиме командной строки, например, по литературе [11].

Первая часть лабораторной работы. Очень внимательно набирайте команды! Не путайте символы «o» и ноль! Команды view, add, med, fir, norm, sub, stat имеют ключи и аргументы. Они вызывают соответствующие утилиты

pt, sum, rang и т.д. Сначала просматриваем исходное изображение Lena, импульсный im и нормальный шум n. Затем формируем зашумленные изображения портрета i0 и n0 и просматриваем их. Затем фильтруем изображения. Результатом ранговой (медианной) фильтрации будет десять файлов ri1.dat – ri5.dat и rn1.dat – rn5.dat. Результатом линейной (fir) фильтрации будет также десять файлов Li1.dat – Li5.dat и Ln1.dat – Ln5.dat.

Для набора статистики предварительно осуществляется нормировка файлов командой **norm/v r??.dat**. Нормировка производится десять раз по числу файлов. Особенно тщательно нужно провести нормировку результатов линейной обработки (тоже десяти файлов). Командой **dir** проконтролируйте правильность нормировки (по числу и размеру файлов). Затем формируются 20 разностных файлов и по ним определяется СКО.

Во второй части лабораторной работы исследуется воздействие различных операторов на изображение тестовой испытательной таблицы ГИТ 0249.

Внимательно изучите и опишите обработанные изображения. Для обработки используйте как все изображение таблицы, так и характерные небольшие фрагменты таблицы (крест, наклонные линии и т.д.). Для удобства сравнения выходные изображения обозначьте out1.dat – out8.dat (по числу исследуемых масок). Просмотрите обработанные изображения командой:

view out?.dat3.

3.2.4. Особенности выполнения лабораторной работы №4 (разделы 1, 2, 3)

Для выполнения лабораторной работы №4, состоящей из трёх разделов, автономно должны быть выполнены требования по установке, настройке и запуску программ. Лабораторная работа №4 имеет простой и понятный интерфейс. Выполнение каждого раздела лабораторной работы происходит в три стадии:

- изучение теоретических материалов и примеров («Введение»);
- прохождение теста («Экзамен»);
- выполнение лабораторной работы («Лабораторная»).

При затруднениях в выполнении лабораторной работы обратитесь к справочной системе программы (кнопка «Помощь»).

3.3. Оформление отчетов

По каждой проделанной лабораторной работе оформляется отдельный отчет. Конкретные требования к отчету приведены в описаниях работ. По лабораторной работе №4 оформляется итоговый отчет, состоящий из трёх разделов. Общие требования к содержанию отчета:

- титульный лист с названием и номером работы;
- цель работы;
- основные теоретические положения;

- краткое содержание и порядок выполнения работы;
- требования к операционной системе и программному обеспечению;
- необходимые расчетные данные;
- алгоритмы и экспериментальные результаты;
- графики, диаграммы, структурные схемы;
- аналитические выводы.

В отчете весьма желательны описание и комментарии к расчетным данным, результатам эксперимента, построенным графикам и диаграммам, структурным схемам цифровых фильтров (назначение и особенности исследуемых фильтров). Выводы можно делать не в конце отчета, а по ходу его оформления.

4. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В соответствии с учебными планами специальностей 201400 «Аудиовизуальная техника», 201500 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура», 230000 «Сервис» (специализация «Сервис электронных систем безопасности») и 200700 «Радиотехника» необходимо выполнить три контрольные работы. Каждая из контрольных работ содержит 25 вариантов индивидуальных заданий.

Названия контрольных работ:

№1. «Анализ характеристик цифровых фильтров» (содержит 2 задачи);

№2. «Исследование эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка» (содержит 7 заданий);

№3. «Цифровая обработка изображений» (содержит 4 задания).

В учебном пособии по ЦОС дана полная информация, позволяющая студенту успешно справиться с данными контрольными работами. Кроме того, по каждой контрольной работе в данном пособии приведены примеры решения задач. Следует внимательно отнестись к оформлению контрольных работ.

Студент должен указать заданный ему вариант задания, повторить полностью формулировку задач, привести промежуточные выводы формул, подстановок и вычислений, а также ход решения с приведением ссылок на подразделы (страницы) учебного пособия и номера формул данного пособия. Недопустимо брать ответы из литературы и справочников. Особое внимание следует уделить записи ответов по решенным задачам (заданиям). В конце каждого из пунктов задания следует выделить ответ (сформулировать вывод) по которому в основном и будет формироваться оценка преподавателем. Работы следует подписывать, указывая группу, где студент обучается и дату выполнения контрольной работы, а также номер заданного варианта. В случае затруднений по выполнению контрольных работ студент должен своевременно обратиться за консультацией к преподавателю через коммуникации ТМЦДО.

4.1. Контрольная работа №1

4.1.1. Основные формулы для анализа характеристик ЦФ

1.0. Прогрессии.

1.0.1. Арифметическая прогрессия $\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r] = \frac{n}{2} (a + l)$,

где l – последний член арифметической прогрессии.

1.0.2. Геометрическая прогрессия $\sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

1.0.3. Арифметико-геометрическая прогрессия

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr)q^k = \frac{a - [a + (n-1)r]q^n}{1 - q} + \frac{rq(1 - q^{n-1})}{(1 - q)^2}.$$

1.1. Аналитическая запись дискретного сигнала

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT), \text{ где } \delta(nT) - \text{ЕИ}.$$

Пример: $\{x(kT)\} = \{x(0), x(T), x(2T), x(3T)\} = \{0; 2; -3; 1\}$,

$$x(nT) = 2\delta(nT - T) - 3\delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T), n \geq 0.$$

1.2. Прямое z-преобразование

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = Z\{f(nT)\}.$$

1.3. Обратное z-преобразование

$$f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z)z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^K \text{res}_{z=z_k} [F(z)z^{n-1}] = \sum_{k=1}^K \text{res}_{z=z_k} [\Psi(z)],$$

здесь направление обхода интеграла C – против часовой стрелки;

K – число полюсов, а z_k – полюсы функции $\Psi(z)$.

Полюс кратности $m > 1$:

$$\text{res}_{z=z_k} [\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [\Psi(z)(z - z_k)^m] - \text{вычет в полюсе кратности } m.$$

Простой полюс ($m = 1$):

$$\text{res}_{z=z_k} [\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow z_k} [\Psi(z)(z - z_k)].$$

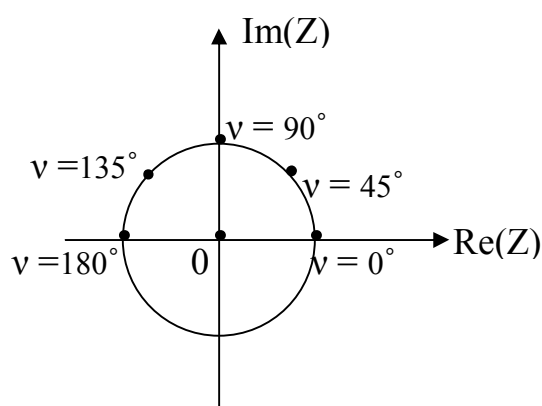
1.4. Дискретная свертка

a) $f(nT) = x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)y(kT)$;

b) $y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)h(kT)$;

c) $X(z) = Z\{x(nT)\}$; $Y(z) = Z\{y(nT)\}$; $F(z) = X(z) \cdot Y(z)$; $f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\}$.

Ω	$\nu = \omega T^\circ$	$z = e^{j\nu}$	$\cos(\nu)$	$\sin(\nu)$	$A(\nu) = H(z) _{z=e^{j\nu}}$
0	0°	1	1	0	$A(0) = H(1) $
$\frac{\pi}{4T}$	45°	$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left H\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right) \right $
$\frac{\pi}{2T}$	90°	j	0	1	$ H(j) $
$\frac{3\pi}{4T}$	135°	$\frac{1-j}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left H\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right) \right $
$\frac{\pi}{T}$	180°	-1	-1	0	$ H(-1) $



б) Использовать свойство четности АЧХ для действительных коэффициентов a_i, b_j .

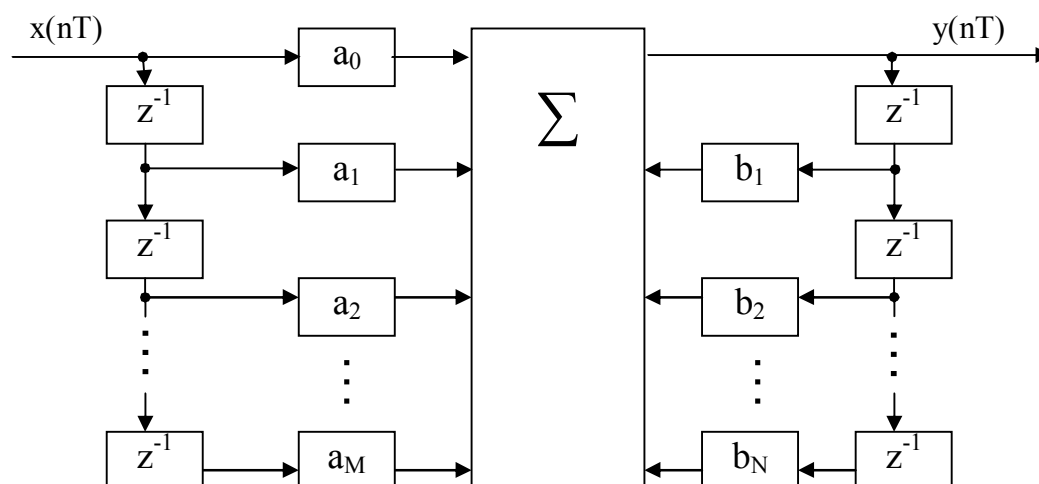
в) Использовать свойство периодичности АЧХ и ФЧХ.

г) Записать $H(z)$ по положительным степеням

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots}$$

Пример: $H(z) = \frac{4 - 2,5z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1} = \frac{4z^2 - 2,5z + 0,8}{z^2}$.

1.9. Прямая форма реализации ЛЦФ



4.1.2. Примеры решения задач

Задача 1.

Задан дискретный сигнал $x(nT) = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 2,5, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & n > 3. \end{cases}$

1. Привести аналитическую форму записи дискретного сигнала.
2. Найти изображение входной последовательности $X(z)$.
3. Записать разностное уравнение, считая $H(z) = X(z)$.
4. Привести структурную схему фильтра.
5. Записать выражение для импульсной характеристики.
6. Найти свертку $y(nT) = x(nT) * h(nT)$ графическим способом.

Решение:

1) Аналитическая форма:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT) = 2,5[\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)].$$

2) Изображение входной последовательности:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = 0z^{-0} + 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) + 0z^{-4} + \dots$$

3) Разностное уравнение (алгоритм функционирования ЦФ):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}); \quad Y(z) = 2,5X(z)[z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}]$$

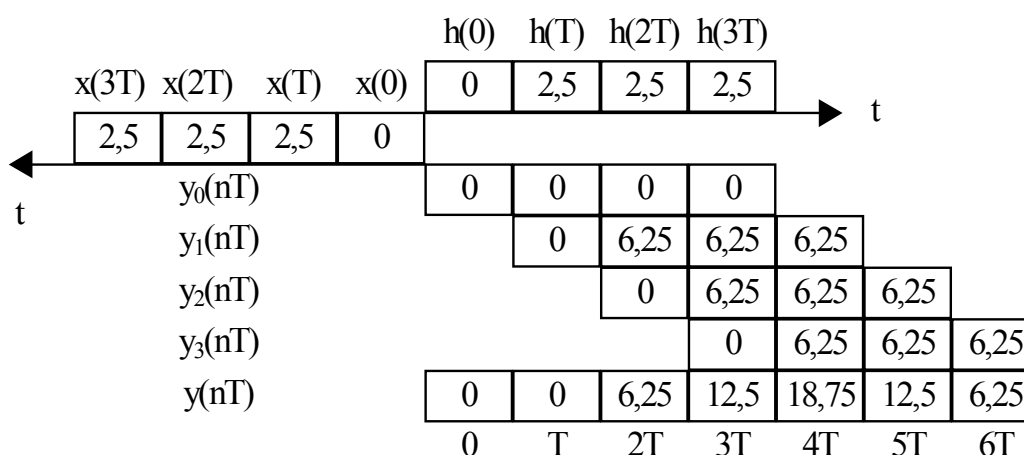
$$y(nT) = 2,5[x(nT - T) + x(nT - 2T) + x(nT - 3T)], \quad n \geq 0.$$

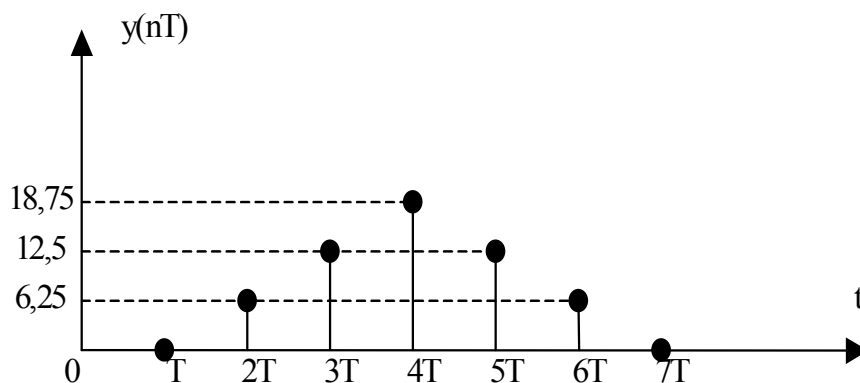
4) ИХ: $h(nT) = 2,5[\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)], \quad n \geq 0.$

5) Свертка: $y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = x(0)h(nT) + x(T)h(nT - T) + \dots$

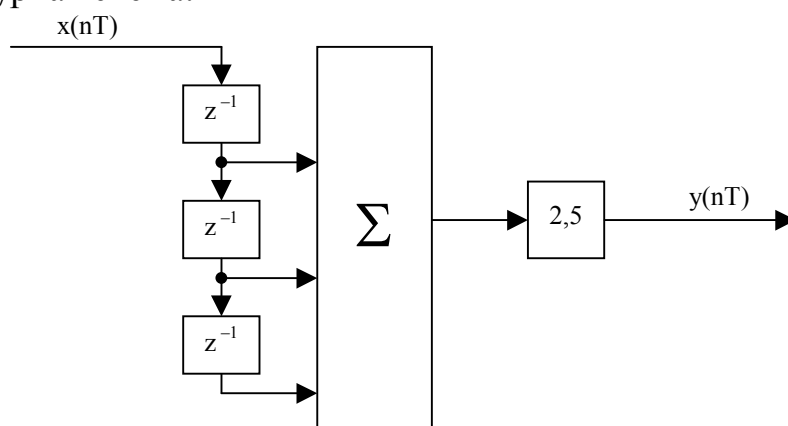
$$\{y(nT)\} = \{0; 0; 6,25; 12,5; 18,75; 12,5; 6,25; 0; \dots\}.$$

Свертка прямоугольных сигналов дает треугольный сигнал.





б) Структурная схема:



Задача 2.

Дано изображение дискретного сигнала $X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}$.

1. Найти $x(nT)$ методом вычетов.
2. Считая $H(z) = X(z)$ записать РУ.
3. Привести структурную схему.

Решение:

$$1) X(z) = \frac{z}{z - 0,3}$$

Находим полюсы $\Psi(z) = \frac{z}{z - 0,3} z^{n-1} = \frac{z^n}{z - 0,3}$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Единственный полюс $z_1 = 0,3$; $m = 1$.

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = \operatorname{res}_{z=0,3}[\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[\frac{z^n}{z - 0,3} (z - 0,3) \right] = 0,3^n; n \geq 0.$$

Или $x(nT) = u(nT) \cdot 0,3^n$, $n \geq 0$.

$$\{x(nT)\} = \{1; 0,3; 0,09; \dots\}.$$

$$2) \text{ РУ: } H(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}; \quad M = 0, \quad a_0 = 1; \quad N = 1, \quad b_1 = 0,3;$$

Вариант 1:

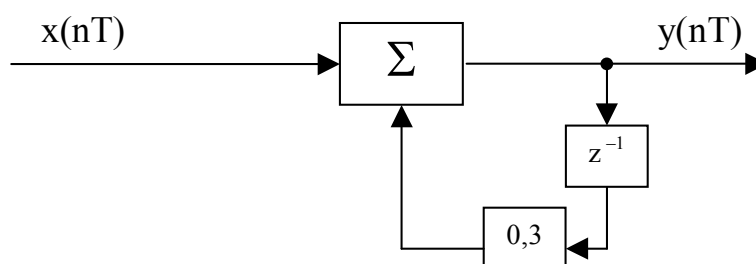
$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j y(nT - jT) = a_0 x(nT) + b_1 y(nT - T) = \\ = x(nT) + 0,3y(nT - T), \quad n \geq 0.$$

Вариант 2:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}; \quad Y(z) = X(z) + 0,3Y(z)z^{-1};$$

$$y(nT) = x(nT) + 0,3y(nT - T), \quad n \geq 0.$$

3) Структурная схема:



Задача 3.

Найти обратное Z-преобразование от $X(z) = z^{-1}$.

Решение:

$$\psi(z) = z^{-1} z^{n-1} = \frac{z^n}{z^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad z_1 = 0; \quad m = 2 - \text{кратность}.$$

Разностное уравнение:

$$x(nT) = Z^{-1} \{X(z)\} = \operatorname{res}_{z=0} \Psi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z^n}{z^2} z^2 \right) \right] = \\ = \lim_{z \rightarrow 0} (nz^{n-1}) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \delta(nT - T), \quad n \geq 0.$$

Таким образом, $\{x(nT)\} = \{0; 1; 0; \dots\}$ – запись выходного сигнала в виде конечной последовательности.

4.1.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №1)

Каждый студент должен по заданному варианту решить две задачи. Ниже первая цифра в нумерации – номер контрольной работы (№1), вторая цифра – номер одного из 25 вариантов и третья цифра – номер одной из двух задач.

1.1.1. Найти Z-преобразование ступенчатой функции $u(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

1.1.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой

$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0,5, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

подается сигнал в виде последовательности трех единичных отсчетов. Определить сигнал на выходе фильтра.

1.2.1. Найти Z-преобразование экспоненциально убывающего сигнала

$$x(nT) = e^{-anT}, \quad n \geq 0.$$

1.2.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой

$$h(nT) = \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 8, \\ 0, & n = 0, n > 8. \end{cases}$ Найти сигнал на выходе фильтра (первые 10 значений).

1.3.1. Найти Z-преобразование дискретизированного гармонического сигнала

$$x(nT) = A \cdot \cos(n\omega_0 T), \quad n \geq 0.$$

1.3.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$

$$\text{подается сигнал } x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$$

Найти сигнал на выходе фильтра (первые 13 значений).

1.4.1. Найти Z-преобразование степенной функции $x(nT) = a^n, |a| < 1, n \geq 0$.

1.4.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - z^{-1} - 0,5z^{-2}}$$

подается сигнал $x(nT) = \exp\left(-\frac{2}{3}n\right), n \geq 0$. Найти Z-преобразование сигнала на выходе фильтра.

1.5.1. Найти Z-преобразование сигнала, состоящего из двух отсчетов

$$x(0) = a \text{ и } x(T) = b.$$

1.5.2. Для обработки сигнала в виде пяти одинаковых отсчетов (дискретизированный прямоугольный импульс) используется согласованный цифровой фильтр, импульсная характеристика которого совпадает по форме с сигналом.

Определить системную функцию фильтра и алгоритмы фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации. Найти сигнал на выходе фильтра (первые 10 отсчетов).

1.6.1. Найти Z-преобразование серии из N равных отсчетов, равных a.

1.6.2. При подаче на вход цифрового фильтра единичного импульса на выходе получается последовательность $\{1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^n; \dots\}$. Найти импульсную характеристику и системную функцию фильтра. Записать алгоритм цифровой фильтрации и изобразить схему фильтра.

1.7.1. Найти Z-преобразование прореженной последовательности

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

1.7.2. При подаче на вход цифрового фильтра последовательности $\{1; 1/4; 1/16; \dots; 1/4^n; \dots\}$ на выходе получается последовательность $\{2; 1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^{n-1}; \dots\}$. Определить системную функцию фильтра, импульсную характеристику и схему фильтра, а также записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.8.1. Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением

$$X(z) = \frac{z}{z - K}. \text{ Найти сигнал } x(nT).$$

1.8.2. Системная функция цифрового фильтра определяется выражением

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \text{ Определить положение нулей и полюсов системной функции на } Z\text{-плоскости.}$$

1.9.1. Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}. \text{ Найти сигнал } x(nT).$$

1.9.2. Задана системная функция цифрового фильтра

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 1,2z^{-1} - 0,64z^{-2}}. \text{ Определить положение нулей и полюсов системной функции на } Z\text{-плоскости. Устойчив ли такой фильтр?}$$

1.10.1. Найти сигнал, Z-преобразование которого определяется выражением $X(z) = 1 + z^{-1}$.

1.10.2. Найти комплексную частотную характеристику цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = e^{-\frac{nT}{\tau}}$. Построить график амплитудно-частотной характеристики при $T/\tau = 1$ и $T/\tau = 0,1$.

1.11.1. Найти сигнал, Z-преобразование которого определяется выражением $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$.

1.11.2. Найти амплитудно-частотную характеристику цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - 0,77z^{-1} + 0,28z^{-2}}$. Построить график амплитудно-частотной характеристики при интервале дискретизации $T = 1$ мс.

1.12.1. Найти сигнал, Z-преобразование которого определяется выражением $X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$.

1.12.2. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}$. Изобразить схемы цифрового фильтра в прямой и канонической формах реализации.

1.13.1. Найти дискретную свертку двух дискретизированных прямоугольных импульсов, заданных пятью отсчетами.

1.13.2. Получите формулу $X(z)$ от дискретной ступенчатой функции

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Указание: Примените формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии. Заметьте, что функция $X(z)$ определена во внешней области единичного круга, т.е. при $|z| > 1$.

1.14.1. Вычислить Z -преобразование дискретной свертки двух сигналов: $x(nT)$, имеющего два ненулевых отсчета $x(0) = 1$ и $x(T) = 1$ и $y(nT)$, состоящего из трех отсчетов: $y(0) = 2$; $y(T) = 2$; $y(2T) = 2$.

1.14.2. Найдите дискретный сигнал $x(n)$, которому отвечает

$$Z\text{-преобразование } X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}.$$

1.15.1. Импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением $h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0; 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$ Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра.

1.15.2. Найдите $x(6)$ дискретной последовательности $x(n)$, Z -преобразование которой $X(z) = \frac{25}{1 - 0,9z^{-1}}$.

1.16.1. Алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид: $y(nT) = x(nT) + 0,5x(nT - T)$. Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и системную функцию в Z -форме.

1.16.2. Задано Z -преобразование $X(z) = \frac{1}{(1 - 0,4z^{-1})(1 - 0,6z^{-1})}$. Найти $x(n)$.

1.17.1. Найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 1. \end{cases}$

1.17.2. Найдите дискретный сигнал $x(n)$, Z -преобразование которого $X(z) = z^{-2}$. Сигнал найти методом обратного Z -преобразования.

1.18.1. Найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$

1.18.2. Вычислите Z -преобразование $F(z)$ свертки $f(n)$ дискретных сигналов $x(n) = \{1; 1; 1; 0; 0; 0; \dots\}$ и $y(n) = \{0; 0; 1; 1; 0; 0; \dots\}$.

1.19.1. Импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением $h(nT) = 2 \exp\left(-\frac{n}{3}\right)$. Найти системную функцию и записать алгоритм фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации.

1.19.2. Найдите комплексную частотную характеристику и амплитудно-частотную характеристику цифрового фильтра. Его разностное уравнение: $y(nT) = x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T)$, $n \geq 0$.

1.20.1. Алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид $y(nT) = 2x(nT) - 0,5x(nT - T) + 0,5y(nT - T)$. Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и его системную функцию.

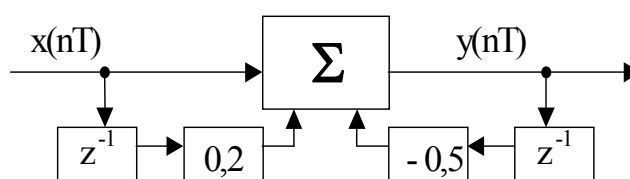
1.20.2. Цифровой фильтр имеет следующий алгоритм $y(n) = x(n - 2) + 0,4y(n - 1) + 0,32y(n - 2)$. Найдите системную функцию, комплексную частотную характеристику и импульсную характеристику фильтра.

1.21.1. Покажите, что цифровой фильтр, алгоритм которого описывается разностным уравнением $y(n) = x(n) - 3x(n - 1) + 3x(n - 2) - x(n - 3)$ осуществляет приближенное трехкратное дифференцирование относительно медленных входных сигналов.

Указание: Найти выражение для КЧХ и разложить в ряд Маклорена при $\omega T \rightarrow 0$.

1.21.2. Найдите аналитическое выражение m -го члена в импульсной характеристике $h(n)$ рекурсивного фильтра, работающего в соответствии с алгоритмом $y(n) = x(n) + y(n - 1) - 0,5y(n - 2)$, $n \geq 0$.

1.22.1. Найти системную функцию фильтра (см. рисунок) и записать алгоритм цифровой фильтрации.



1.22.2. Цифровой фильтр имеет следующий алгоритм $y(n) = 1,5x(n) + 4x(n - 1) + 0,85y(n - 1)$. Фильтр работает с шагом дискретизации по времени $T = 0,1$ мс. Найдите модуль $|H(e^{j\omega})|$ и фазовый угол $\varphi(\omega)$ частотного коэффициента передачи фильтра на частоте $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с.

1.23.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$.

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.23.2. Собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре второго порядка описываются разностным уравнением следующего вида: $y(n) = x(n) + y(n - 1) - 0,5y(n - 2)$, $n \geq 0$. Исследуйте устойчивость данного фильтра и определите параметры колебаний на выходе фильтра при подаче на его вход единичного импульса.

1.24.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$.

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.24.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = e^{-2n}$ подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 10, \\ 0, & n = 0, n > 10. \end{cases}$ Определить сигнал на выходе фильтра.

1.25.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{0,8 + 0,3z^{-1} - 0,5z^{-2}}{1 - 0,6z^{-1} - 0,4z^{-2} + 0,3z^{-3}}$. Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра.

1.25.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}$ подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$ Определить сигнал на выходе фильтра.

4.2. Контрольная работа № 2

4.2.1. Основные формулы для исследования эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка (ЦРФ2П)

2.1. Устойчивость ЦРФ2П (нерекурсивный фильтр всегда устойчив).

$$2.1.1. \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty.$$

2.1.2. Корни характеристического уравнения должны находиться внутри единичной окружности:

$$z^N - b_1 z^{N-1} - b_2 z^{N-2} - \dots - b_N = 0, \text{ т.е. } |z_i| < 1.$$

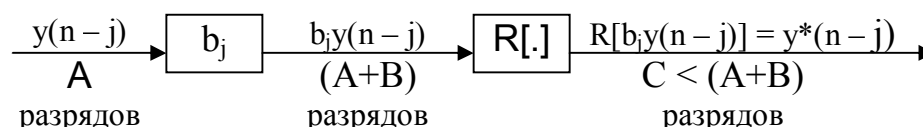
а) Если корни вещественные, то в системе устанавливается апериодический режим;

б) Если есть комплексно-сопряженные корни, то система колебательная.

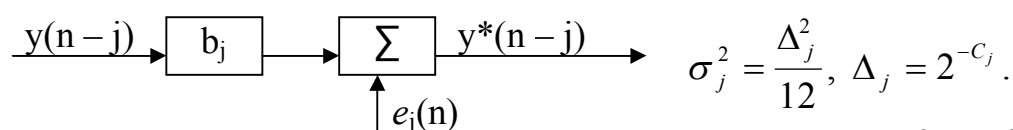
2.2. Разностное уравнение с учетом операций квантования:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M R[a_i x(n-i)] + \sum_{j=1}^N R[b_j y(n-j)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $R[.]$ – оператор квантования.



При вероятностной оценке ошибки квантования операцию квантования линеаризируем, т.е. вводим сумматор и источник шума $e_j(n)$:



$$\sigma_j^2 = \frac{\Delta_j^2}{12}, \quad \Delta_j = 2^{-C_j}.$$

$a_0, a_1, \dots, a_{C_j}, C_j$ – номер младшего разряда в j -й цепи.

$$2.3. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_k^2(n), \sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n), \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12},$$

$\sigma_{k \text{ Вх}}^2 = \sigma_j^2$ либо σ_i^2 – для прямой цепи, Δ – шаг квантования в АЦП.

$$2.4. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_k(z) H_k(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Psi(z) dz.$$

Контурный интеграл находится как сумма вычетов в особых точках подынтегрального выражения, лежащих внутри единичной окружности $|z_i| < 1$, т.е. полюса $H_k(z^{-1})$ не учитываются, т.к. они лежат вне единичной окружности.

$$2.5. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |H_k(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H_k(e^{j\nu})|^2 d\nu,$$

где $\nu = \omega T$ – нормированная частота.

$$2.6. \sigma_{\Sigma \text{ Вых}}^2 = \sum_{k=0}^K \sigma_{k \text{ Вых}}^2, \sigma_{0 \text{ Вых}}^2 \text{ – погрешность, связанная с АЦП.}$$

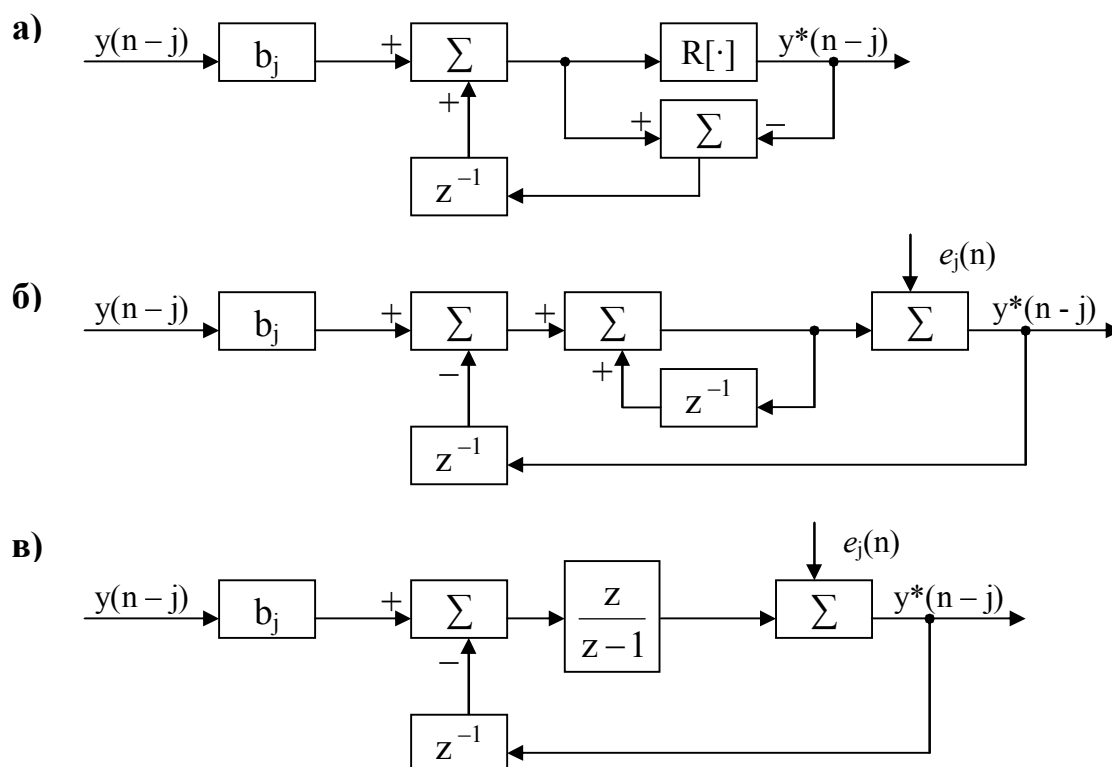
При вероятностном подходе используются предположения:

а) Отсчеты от всех источников погрешностей $e_k(n)$ представляются дискретными белыми шумами с равномерным законом распределения и дисперсией $\sigma_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{12}$, $\Delta_k = 2^{-C_k}$.

б) Все источники шума $e_k(n)$ не коррелированы между собой.

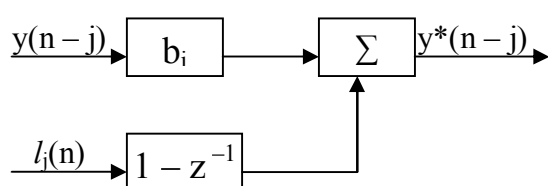
в) Любой из источников шума $e_k(n)$ не коррелирован с входным сигналом $x(n)$.

2.7. Учет остатков. Математическая модель j-й цепи ОС.



$$\text{СФ по сигналу: } H_s(z) = \frac{b_j \frac{z}{z-1}}{1 + \frac{z}{z-1} z^{-1}} = \frac{b_j z}{z-1+1} \equiv b_j.$$

$$\text{СФ по шуму: } H_l(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} \frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z-1+1} = 1 - z^{-1}.$$



Таким образом, при учете остатков шумы дополнительно проходят по цепи вычислителя первой разности (цифрового дифференциатора).

4.2.2. Устойчивость ЦРФ2П

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - b_1 z - b_2}; \quad z^2 - b_1 z - b_2 = 0 \text{ — характеристическое уравнение;}$$

$$1. \quad |z_{1,2}| = \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + b_2}}{2} \right| < 1 \text{ — действительные корни;}$$

$$2. \quad |z_{1,2}| = \left| \frac{b_1 \pm i \sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)}}{2} \right| < 1 \text{ — комплексно-сопряженные корни;}$$

$$3. \quad D = \frac{b_1^2}{4} + b_2 = 0 \text{ — граница колебательности.}$$

$$|z_1| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1; \text{ — 1-е условие.}$$

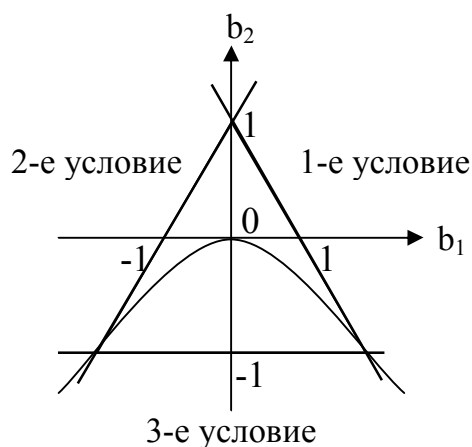
$$|z_1| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1; \text{ — 2-е условие.}$$

$$|z_2| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1;$$

$$|z_2| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1,$$

т.е. получились те же условия.

$$|z_{1,2}| = \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} - b_2 < 1 \Rightarrow b_2 < -1 \text{ — 3-е условие.}$$



$D = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{b_1^2}{4}$; — граница между аperiodическими и колебательными режимами.

1) $b_2 = 1 - b_1$; $b_1 \in [0; 2]$;

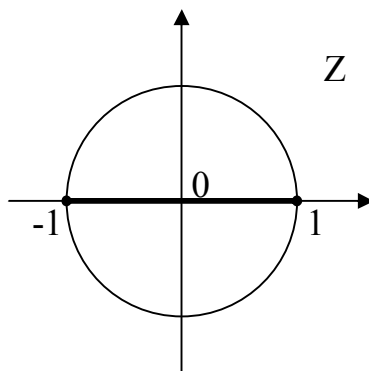
$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 - 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 - 2)) = \begin{cases} 1; \\ b_1 - 1; \end{cases}$$

2) $b_2 = 1 + b_1$; $b_1 \in [-2; 0]$;

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 + 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 + 2)) = \begin{cases} -1; \\ b_1 + 1; \end{cases}$$

$D > 0$; $z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}$ — два полюса на действительной оси Z . То есть

область аperiodических решений отображается в пары точек на действительной оси Z .



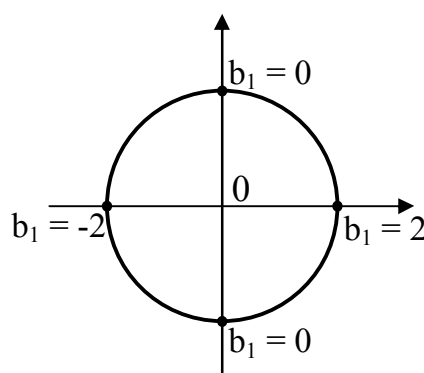
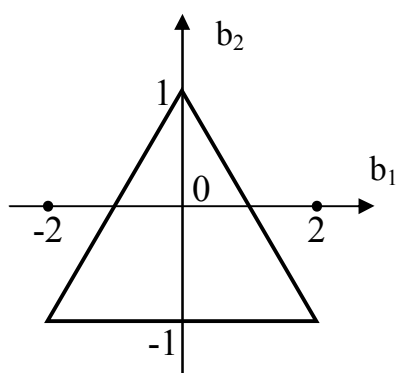
$$D < 0; z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm i \sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)} = \frac{b_1}{2} \pm i \sqrt{-D}.$$

Модули $|z_{1,2}| = \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} - b_2 = -b_2 < 1$ – модуль определяется только значением b_2 ;

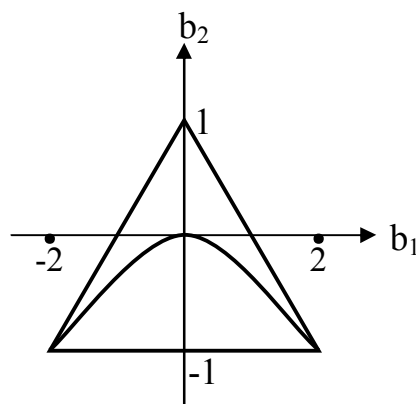
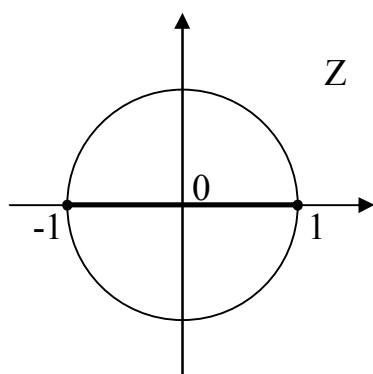
при $b_2 \Rightarrow -1$ мы подходим к границе устойчивости;

при $b_2 \Rightarrow 0$ модуль $b_2 \Rightarrow -1$.

Граница $b_2 \Rightarrow -1; \Rightarrow |z_{1,2}| = 1$; отображается на единичную окружность (конкретная точка зависит от коэффициента b_1).



Граница устойчивости: $D = 0; z_{1,2} = \frac{b_1}{2}; b_1 \in [-2; 2];$



Два полюса сливаются в один $\left(z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \right)$.

Учет полюсов дополнительной функции $\Psi(z)$

Для учета шума квантования АЦП.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}};$$

$z^2 - b_1 z - b_2 = 0$ – характеристическое уравнение. $Z_{1,2}$ – корни уравнения.

$$z_1 + z_2 = b_1; z_1 z_2 = -b_2;$$

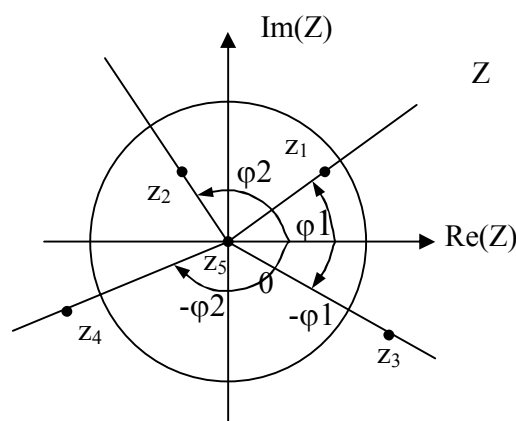
$$\Psi(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \frac{1}{z} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \cdot \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{-b_2 (z - z_3)(z - z_4)} \cdot \frac{1}{z};$$

Полюсы $H(z)$: $z_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}$.

Полюсы $H(z^{-1})$: $z_3 = \frac{1}{z_1}$; $z_4 = \frac{1}{z_2}$.

Полюс $1/z$: $z_5 = 0$.

Учитываем только полюсы: z_1, z_2 и z_5 .



Пример:

Вычет в $z = 0$. $\operatorname{Res}_{z=z_5} \Psi(z) = \frac{a_0 a_2}{z_1 z_2} = -\frac{a_0 a_2}{b_2}$.

Должно выполняться условие $\begin{cases} a_0 \neq 0, \\ a_2 \neq 0, \end{cases}$ иначе вычет будет равен нулю,

и ничего не добавится к сумме вычетов.

4.2.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №2)

Для заданного варианта системной функции рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка (РЦФ2П) (первая цифра – номер контрольной работы (№2), вторая цифра – номер одного из 25 вариантов) выполнить расчеты и сделать выводы по перечисленным ниже заданиям.

1. Оцените область устойчивости цифрового фильтра второго порядка в зависимости от значений коэффициентов b_1 и b_2 и разбейте ее на под-области для апериодических и колебательных систем. Область устойчивости оценить: 1 – по характеристическому уравнению; 2 – по критерию Рауса-Гурвица.

2. Определите дисперсию шума АЦП на выходе цифрового фильтра (получите расчетную формулу $\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot \dots$).

3. Нарисуйте структурную схему цифрового фильтра при канонической форме реализации, и последующие пункты задания выполняйте используя эту форму реализации.

4. Определите выходные дисперсии шумов округления, вносимых при умножении на коэффициенты фильтра b_1 и b_2 .

5. Определите суммарную дисперсию шумов квантования и округления на выходе цифрового фильтра.

6. При предположении, что один из умножителей на b_1 (b_2) выполняет операции с сохранением остатка, вычислите выходную дисперсию шумов округления.

7. Сделайте выводы и объяснения процессов формирования ошибок и их представления в виде шумов в цифровом фильтре.

Варианты системных функций РЦФ 2-го порядка:

$$2.1. H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.2. H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.3. H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.4. H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.5. H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.6. H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.7. H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.8. H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.9. H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.10. H(z) = \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.11. H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.12. H(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.13. H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.14. H(z) = \frac{2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.15. H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.16. H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.17. H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.18. H(z) = \frac{2 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.19. H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.20. H(z) = \frac{2 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.21. H(z) = \frac{2 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.23. H(z) = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.22. H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

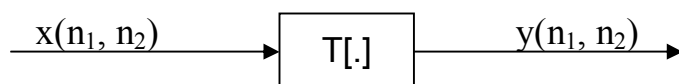
$$2.24. H(z) = \frac{z^{-1} - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.25. H(z) = \frac{2 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

4.3. Контрольная работа №3

4.3.1. Примеры решения задач по цифровой обработке изображений

Дан входной двумерный массив чисел (изображение) $x(n_1, n_2)$. Необходимо получить выходной массив при заданном операторе преобразования $T[.]$.



$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)]$, $T[.]$ – оператор системы, представляющей правило или набор правил, по которым происходит преобразование (отображение) входного сигнала на выходной.

Мы будем рассматривать следующие классы многомерных систем:

- линейные;
- инвариантные к сдвигу (стационарные);
- устойчивые;
- физически реализуемые;
- нерекурсивные (всегда устойчивы).

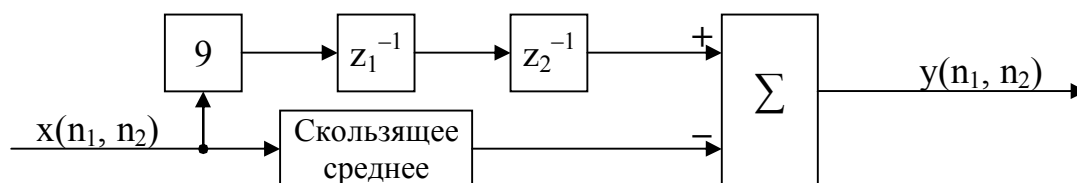
Примеры нерекурсивных двумерных цифровых фильтров:

а) оператор двойного дифференцирования (разделимый фильтр)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

б) лапласиан не является разделимым фильтром, поэтому поступим следующим образом:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



z_1^{-1} – оператор задержки на один элемент;

z_2^{-1} – оператор задержки на одну строку.

Нерекурсивный цифровой фильтр:

$$PУ: y(n_1, n_2) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} a_{i_1, i_2} x(n_1 - i_1, n_2 - i_2), \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0;$$

При $n_1 < 0, n_2 < 0, \quad x(n_1, n_2) = 0$.

а) Обработка двойным дифференцированием:

$$x(n_1, n_2) \quad \begin{array}{c} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ \hline 2 & & 1 & & \\ \hline 3 & & 1 & & \\ \hline 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 1 & & & 1 \\ \hline 6 & 1 & & & 1 \\ \hline 7 & 1 & & & 1 \\ \hline 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad ** \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} y_1(n_1, n_2) \\ \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & & & -1 & 2 & -1 & \\ \hline 2 & & -1 & 2 & -1 & & \\ \hline 3 & & -1 & 2 & -1 & & \\ \hline 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 5 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 6 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 7 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$y_1(n_1, n_2) \quad \begin{array}{c} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & & & -1 & 2 & -1 & \\ \hline 2 & & -1 & 2 & -1 & & \\ \hline 3 & & -1 & 2 & -1 & & \\ \hline 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 5 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 6 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 7 & -1 & 2 & -1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad ** \quad \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} y_2(n_1, n_2) \\ \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline 2 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline 3 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline 4 & 1 & -3 & 5 & -4 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 5 & & 1 & -1 & 1 & 1 & & -1 \\ \hline 6 & & 1 & -1 & & -1 & 1 & \\ \hline 7 & & 0 & 0 & & & & \\ \hline 8 & & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & \\ \hline 9 & -1 & & 1 & & 1 & & -1 \\ \hline 10 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

б) Обработка лапласианом:

$$x(n_1, n_2) \quad \begin{array}{c} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ \hline 2 & & 1 & & \\ \hline 3 & & 1 & & \\ \hline 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 1 & & & 1 \\ \hline 6 & 1 & & & 1 \\ \hline 7 & 1 & & & 1 \\ \hline 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad ** \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} y_1(n_1, n_2) \\ \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline 3 & & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 6 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 7 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 8 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$y_1(n_1, n_2) \quad \text{---} \quad y_2(n_1, n_2)$$

→ n ₁							
	0	1	2	3	4	5	6
0					1	1	1
1				1	1	1	
2			1	1	1		
3		1	1	1			
4	1	2	3	3	3	2	1
5	1	1	1		1	1	1
6	1	1	1		1	1	1
7	1	1	1		1	1	1
8	1	2	3	3	3	2	1

$$** \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad =$$

→ n ₁							
	0	1	2	3	4	5	6
0					1	1	1
1				1	2	2	1
2			1	2	3	2	1
3		1	2	3	2	1	
4	1	3	5	5	4	2	1
5	2	4	5	4	4	3	2
6	3	4	5	3	5	4	3
7	3	3	3		3	3	3
8	3	4	5	3	5	4	3
9	2	3	4	3	4	3	2
10	1	2	3	3	3	2	1

$$9 \cdot x(n_1, n_2) \quad \text{---} \quad y_2(n_1, n_2) \quad \text{---} \quad y_3(n_1, n_2)$$

→ n ₁							
	0	1	2	3	4	5	6
0							
1						9	
2					9		
3				9			
4			9				
5		9	9	9	9	9	
6		9				9	
7		9				9	
8		9				9	
9		9	9	9	9	9	
10							

$$- \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad =$$

→ n ₁							
	0	1	2	3	4	5	6
0					1	1	1
1				1	2	2	1
2			1	2	3	2	1
3		1	2	3	2	1	
4	1	3	5	5	4	2	1
5	2	4	5	4	4	3	2
6	3	4	5	3	5	4	3
7	3	3	3		3	3	3
8	3	4	5	3	5	4	3
9	2	3	4	3	4	3	2
10	1	2	3	3	3	2	1

$$=$$

→ n ₁							
	0	1	2	3	4	5	6
0					-1	-1	-1
1				-1	-2	7	-1
2			-1	-2	6	-2	-1
3		-1	-2	6	-2	-1	
4	-1	-3	4	-5	-4	-2	-1
5	-2	5	4	5	5	6	-2
6	-3	5	-5	-3	-5	5	-3
7	-3	6	-3		-3	6	-3
8	-3	5	-5	-3	-5	5	-3
9	-2	6	5	6	5	6	-2
10	-1	-2	-3	-3	-3	-2	-1

Элементы произвольной маски M и коэффициенты НРЦФ a_{i1}, a_{i2} определяются следующим образом:

$$M \Rightarrow \begin{matrix} \begin{matrix} a_{2,2} & a_{1,2} & a_{0,2} \\ a_{2,1} & a_{1,1} & a_{0,1} \\ a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} \end{matrix} \end{matrix} .$$

4.3.2. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа № 3)

Первая цифра – номер контрольной работы (№ 3), вторая цифра номер одного из 25 вариантов, третья цифра – номер одного из 4 заданий.

3.1. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление – таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.1.1. «скользящее среднее»;
- 3.1.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.1.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.1.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.2. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление – таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.2.1. «скользящее среднее»;
- 3.2.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.2.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.2.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.3. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление – таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.3.1. «скользящее среднее»;
- 3.3.2. лапласиан для «восьми соседей»;

3.3.3. оператор выделения вертикальных линий;

3.3.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.4. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

3.4.1. «скользящее среднее»;

3.4.2. лапласиан для «восьми соседей»;

3.4.3. оператор выделения вертикальных линий;

3.4.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.5. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

3.5.1. «скользящее среднее»;

3.5.2. лапласиан для «восьми соседей»;

3.5.3. оператор выделения вертикальных линий;

3.5.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.6. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.6.1. «скользящее среднее»;
- 3.6.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.6.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.6.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.7. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.7.1. «скользящее среднее»;
- 3.7.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.7.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.7.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.8. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.8.1. «скользящее среднее»;
- 3.8.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.8.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.8.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.9. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.9.1. «скользящее среднее»;
- 3.9.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.9.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.9.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.10. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.10.1. «скользящее среднее»;
- 3.10.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 3.10.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 3.10.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.11. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.11.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.11.2. лапласиан для «четырех соседей»;
- 3.11.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.11.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.12. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры

по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.12.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.12.2. лапласиан для «четырех соседей»;
- 3.12.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.12.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.13. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.13.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.13.2. лапласиан для «четырех соседей»;
- 3.13.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.13.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.14. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.14.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.14.2. лапласиан для «четырех соседей»;
- 3.14.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.14.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.15. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.15.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.15.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3.15.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.15.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.16. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.16.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.16.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3.16.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.16.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.17. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.17.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.17.2. «лапласиан для четырёх соседей»;
- 3.17.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.17.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра

и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.18. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.18.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.18.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3.18.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.18.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.19. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.19.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.19.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3.19.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.19.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.20. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.20.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 3.20.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3.20.3. оператор выделения левой диагонали;
- 3.20.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.21. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.21.1. оператор выделения правой диагонали;
- 3.21.2. оператор двойного дифференцирования;
- 3.21.3. оператор выделения горизонтальных линий;
- 3.21.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.22. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.22.1. оператор выделения правой диагонали;
- 3.22.2. оператор двойного дифференцирования;
- 3.22.3. оператор выделения горизонтальных линий;
- 3.22.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.23. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 3.23.1. оператор выделения правой диагонали;
- 3.23.2. оператор двойного дифференцирования;

3.23.3. оператор выделения горизонтальных линий;

3.23.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.24. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

3.24.1. оператор выделения правой диагонали;

3.24.2. оператор двойного дифференцирования;

3.24.3. оператор выделения горизонтальных линий;

3.24.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

3.25. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

3.25.1. оператор выделения правой диагонали;

3.25.2. оператор двойного дифференцирования;

3.25.3. оператор выделения горизонтальных линий;

3.25.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ

После изучения теоретической и практической частей дисциплины «Цифровая обработка сигналов» для студентов, обучающихся по специальностям 201400 «Аудиовизуальная техника», 201500 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура», и 230200 «Сервис» (специализация «Сервис электронных систем безопасности») по учебному плану предусмотрено выполнение курсового проекта.

Целью курсового проектирования является освоение студентами методов синтеза цифровых фильтров по заданному аналоговому фильтру-прототипу и преобразование их частотных характеристик (раздел 2 учебного пособия). Анализ характеристик синтезированных фильтров (раздел 1 учебного пособия). Проектирование разработанного фильтра на базе цифровой схемотехники (раздел 4). При расчетах возможно использование программных модулей из лабораторных работ №1 и №2, которые могут работать автономно.

5.1. Варианты индивидуальных заданий

Исходные данные:

$f_d = 100 \text{ кГц}$ - частота дискретизации;

$f_{cp} = f_0 + (N-1) \cdot \Delta f$ - частота среза по уровню -3 дБ;

$f_2 = 2f_{cp}$ - частота среза по уровню -12 дБ;

$f_0 = 10 \text{ кГц}$, $\Delta f = 1 \text{ кГц}$, $N = 1; 2; \dots; 25$ (номер варианта).

Использовать в качестве аналогового фильтра-прототипа фильтр Баттерворта 2-го порядка, операторный коэффициент передачи которого выражается формулой

$$K(p) = \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_{cp}p + \omega_{cp}^2},$$

а его амплитудно-частотная характеристика $|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cp}}\right)^4}}$.

Импульсная характеристика фильтра описывается выражением

$$h(t) = \sqrt{2}\omega_{cp} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}t\right), t \geq 0.$$

Необходимо синтезировать ЦФ Баттерворта следующими методами:

1. Инвариантного преобразования импульсной характеристики.
2. Отображения дифференциалов.
3. Билинейного преобразования.

4. Z-форм.

5. Выбрать ЦФ, синтезированный выше методом билинейного преобразования, и получить используя частотные преобразования фильтры с другими частотными характеристиками.

5.1. ФНЧ --> ФНЧ1.

5.2. ФНЧ --> ФВЧ.

5.3. ФНЧ --> ПФ.

$\Theta_{cp} = 2\pi f_{cp}$ - угловая частота среза исходного цифрового ФНЧ,

$\omega_{cp} = 1,5\Theta_{cp}$ - угловая частота среза преобразованного цифрового ФНЧ1,

$\omega_{cp} = \Theta_{cp}$ - угловая частота среза преобразованного цифрового ФВЧ,

$\omega_1 = \frac{\Theta_{cp}}{\sqrt{2}}$, $\omega_2 = \sqrt{2}\Theta_{cp}$ - угловые частоты среза полосового цифрового

фильтра.

Для синтезированных фильтров получить выражение для системной функции $H(z)$, символьные и численные значения ее коэффициентов a_i , b_j .

Зарисовать структурные схемы синтезированных ЦФ.

На одном графике построить АЧХ аналогового фильтра и цифровых фильтров, синтезированных по пп. 1 – 4.

На одном графике построить АЧХ исходного цифрового фильтра и цифровых фильтров, синтезированных по п.п. 5.1; 5.2; 5.3.

6. Найти значения нулей и полюсов. Показать картину нулей и полюсов на комплексной Z – плоскости.

7. Проверить условие устойчивости фильтра.

8. Записать выражение для системной функции и амплитудно-частотной характеристики. Рассчитать и построить первые 10 отсчетов импульсной и переходной характеристик.

9. Показать структурную схему фильтра для прямой и канонической форм реализации.

10. Записать алгоритм обработки фильтра (разностное уравнение) для прямой и канонической форм реализации. Привести объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала.

11. Нарисовать эквивалентную шумовую схему фильтра для прямой и канонической форм реализации. Рассчитать среднеквадратические значения шума квантования всех источников.

12. Показать, как изменяются значения нулей, полюсов и, соответственно, амплитудно-частотная характеристика фильтра при:

а) $a_1 = 0$; б) $a_2 = 0$; в) $a_1 = a_2 = 0$; г) $a_2 = b_2 = 0$; д) $b_1 = 0$.

13. Составить схемную реализацию цифрового фильтра.

14. Заключение и выводы по результатам проектирования ЦФ.

5.2. Основные формулы для синтеза цифровых фильтров

1. Инвариантное преобразование ИХ

$h(nT) = T \cdot h_a(t)|_{t=nT}$, $n \geq 0$. Домножение на T производится по двум причинам:

а) для выполнения одинаковых условий передачи по постоянной составляющей, т.е. пусть $K(0) = 1$, тогда $H(e^{j\omega T})|_{\omega=0} = H(1) \approx 1$. Но нормировка все равно нужна, т.е. $H_n(e^{j\omega T}) = \frac{H(e^{j\omega T})}{|H(1)|}$;

б) ИХ ЦФ должна быть безразмерной.

2. Метод отображения дифференциалов

Известен операторный коэффициент передачи $K(p)$ фильтра-прототипа.

$p = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$ – отображающая замена (замена Эйлера).

3. Метод билинейного преобразования (БЛП)

Известен $K(p, \omega_a)$, где $\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{cp} T}{2}\right)$,

где ω_{cp} – необходимая частота среза ЦФ,

$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ – отображающая замена.

4. Метод Z-форм

Преобразуем $K(p)$ к виду, когда показатели степеней p – отрицательные; затем отображающие замены:

$$p^{-1} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}; \quad p^{-2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}.$$

5. Частотные преобразования ФНЧ

$\Phi_{НЧ} \rightarrow \Phi_{НЧ1}$

Выбираем ЦФ, синтезированный методом БЛП, с частотой среза Θ_{cp} по уровню -3 дБ; $H(z)$ – системная функция ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_{cp} - \omega_{cp} T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_{cp} + \omega_{cp} T}{2}\right)},$$

где ω_{cp} – требуемая частота среза ФНЧ1.

$\Phi_{НЧ} \rightarrow \Phi_{ВЧ}$

$H(z)$ с Θ_{cp} – СФ исходного ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}; \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Theta_{cp} + \omega_{cp} T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_{cp} - \omega_{cp} T}{2}\right)},$$

где ω_{cp} – требуемая частота среза ФВЧ.

$\Phi НЧ \rightarrow ПФ$

$H(z)$ с Θ_{cp} – СФ исходного ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}; \alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1 T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1 T}{2}\right)};$$

$$k = ctg\left(\frac{\omega_2 - \omega_1 T}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\Theta_{cp} T}{2}\right).$$

Дадим некоторые пояснения по использованию приведенных формул.

Найдем ИХ фильтра Баттерворта второго порядка исходя из $K(p)$

$$K(p) = \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_{cp}p + \omega_{cp}^2}; h(t) = L^{-1}\{K(p)\};$$

$$h_a(t) = \sqrt{2}\omega_{cp} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}t\right), t \geq 0. \text{ При замене } t \text{ на } nT \text{ получим:}$$

$$h(nT) = T \cdot h_a(nT), n \geq 0.$$

$$\sin\left(\frac{\omega_{cp} T}{\sqrt{2}}n\right) = \sin(\beta n) = \frac{e^{j\beta n} - e^{-j\beta n}}{2j}, \text{ где } \beta = \frac{\omega_{cp} T}{\sqrt{2}};$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}; \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q};$$

Задача: найти q_1 и q_2 и свернуть ряд, затем привести $H(z)$ к стандартному виду:

$$H_1(z) = k_0 \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{-j}} = k_0 \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots}.$$

Определить сначала a_i , b_j в символьном виде, затем в числовом виде.

При использовании метода отображения дифференциалов производим в $K(p)$ отображающую замену $p = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$, получаем выражение для $H_2(z)$ и

приводим его к стандартному виду. Затем находим коэффициенты a_i и b_j сначала в символьном, а затем в числовом виде.

При БЛП переопределяем частоту: $\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{cp} T}{2}\right)$ и записываем выра-

жение для операторного коэффициента $K(p) = \frac{\omega_a^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_a p + \omega_a^2}$; проводим

замену $p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$, получаем выражение для $H_3(z)$, которое приводим к стандартному виду (должен присутствовать k_0 , а коэффициенты a_i были бы как можно проще).

При использовании метода Z-форм приводим выражение для операторного коэффициента к виду $K(p) = \frac{M(p)p^{-2}}{N(p)p^{-2}}$ к отрицательным степеням p . Производя соответствующие замены для p^{-1} и p^{-2} , находим выражение для $H_4(z)$.

5.3. Примеры расчетов и оформления курсового проекта

Приведенные расчеты по проектированию ЦФ являются достаточно полными, но обучающийся должен избежать искушения, встать на путь повторения и копирования приведенного ниже примера оформления курсового проекта.

Именно поэтому, в приведенном примере использованы частотные преобразования ЦФ, синтезированного по методу Z-форм, а не по методу билинейного преобразования, которое задано в курсовом проекте. По этой же причине не раскрыт п. 13, в котором обучающийся должен показать самостоятельность подхода к проектированию ЦФ, и п. 14, подводющий итог по изучению дисциплины «Цифровая обработка сигналов».

5.3.1. Синтез цифрового фильтра Баттерворта методом инвариантного преобразования ИХ

Задана импульсная характеристика (ИХ):

$$h(t) = \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right) \cdot \sin\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right), \quad \text{где } \omega_{cp} = 2\pi f_{cp};$$

$$f_{cp} = f_0 + (N-1) \cdot \Delta f = 10 + (11-1) \cdot 1 = 20 \text{ кГц};$$

$$\omega_{cp} = 2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 10^3 = 12,56 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для того чтобы получить ИХ цифрового фильтра (ЦФ) необходимо про- дискретизировать ИХ аналогового фильтра – прототипа:

$h(nT) = T \cdot h(t) \Big|_{t=nT}$, где T – это период дискретизации. $T = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$ с.

Для дискретизации воспользуемся прямым Z – преобразованием:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot \sin\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot z^{-n} \\
 H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot \left\{ -\frac{j}{2} \left[\exp\left(j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} nT\right) - \exp\left(-j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} nT\right) \right] \right\} \cdot z^{-n} = \\
 &= -\frac{j}{2} \cdot T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot \left[\exp\left(j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} nT\right) - \exp\left(-j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} nT\right) \right] \cdot z^{-n} = \\
 &= -\frac{j}{2} \cdot T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT + j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT - j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot nT\right) \cdot z^{-n} \right] = \\
 &= -\frac{j}{2} \cdot T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T + j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1} \right]^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T - j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1} \right]^n \right] = \\
 &= -\frac{j}{2} \cdot T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T + j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T - j \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1}} \right] = \\
 &= T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-1} + \exp\left(-\frac{2 \cdot \omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot z^{-2}},
 \end{aligned}$$

таким образом, получили системную функцию $H(z)$: $H(z) = \frac{a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$,

$$a_1 = T \cdot \omega_{cp} \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) = 10^{-5} \cdot 12.56 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{12.56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}\right) \cdot \sin\left(\frac{12.56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}\right)$$

$$a_1 = 0.56726$$

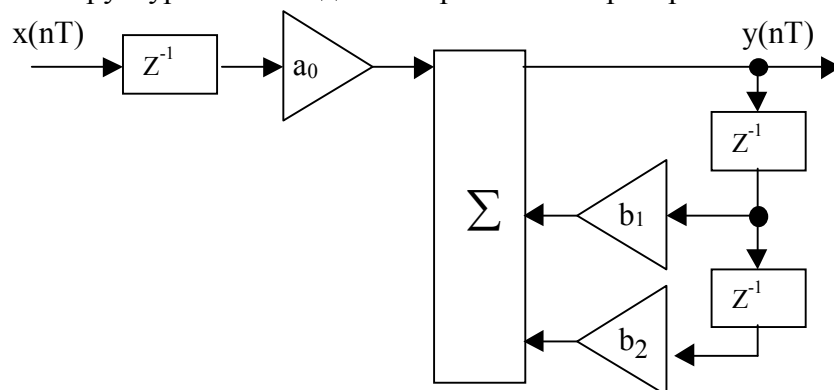
$$b_1 = 2 \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) = 2 \cdot \exp\left(-\frac{12.56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}\right) \cdot \cos\left(\frac{12.56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}\right)$$

$$b_1 = 0.51859$$

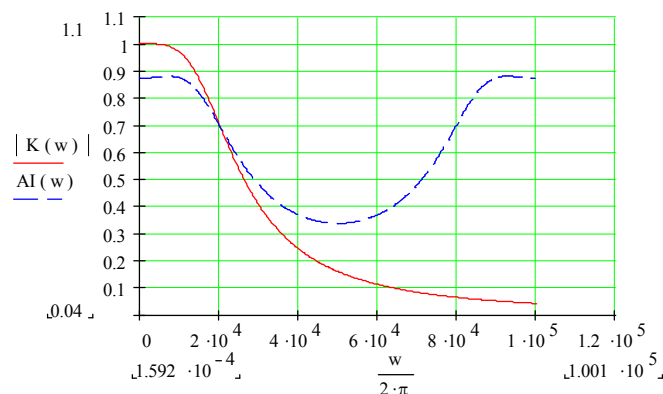
$$b_2 = -\exp\left(-\frac{2 \cdot \omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot T\right) = -\exp\left(-\frac{2 \cdot 12.56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}\right)$$

$$b_2 = -0.16912$$

Структурная схема для инвариантного преобразования ИХ



АЧХ аналогового фильтра (сплошная) и ЦФ (пунктир)



5.3.2. Синтез ЦФ методом отображения дифференциалов

Передаточная характеристика: $K(p) = \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot p + \omega_{cp}^2}$;

$p = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$, тогда

$$H(z) = \frac{\omega_{cp}^2}{\frac{1}{T^2} \cdot (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) + \omega_{cp}^2} = \frac{\omega_{cp}^2}{\frac{1}{T^2} - \frac{2}{T^2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{T^2} \cdot z^{-2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{cp}}{T} - \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{cp}}{T} \cdot z^{-1} + \omega_{cp}^2} = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot T^2}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot T + \omega_{cp}^2 \cdot T^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{T^2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{cp}}{T} + \omega_{cp}^2\right) - \left(\frac{2}{T^2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{cp}}{T}\right) \cdot z^{-1} + \frac{1}{T^2} \cdot z^{-2}}$$

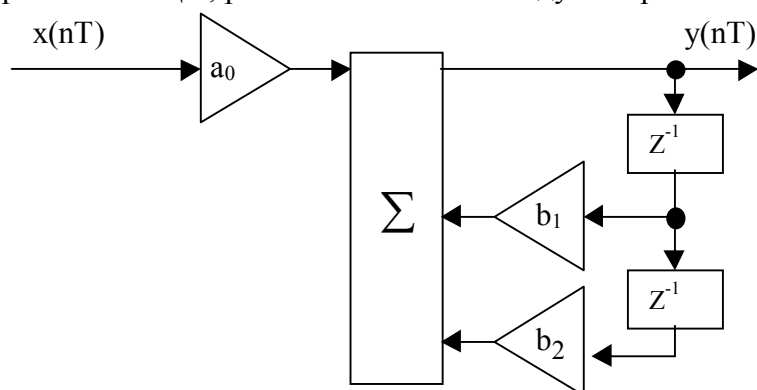
Таким образом, получили системную функцию $H(z)$: $H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$.

$$a_0 = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot T^2}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot T + \omega_{cp}^2 \cdot T^2} = \frac{(1.256)^2}{1 + \sqrt{2} \cdot 1.256 + (1.256)^2} \quad a_0 = 0.3625$$

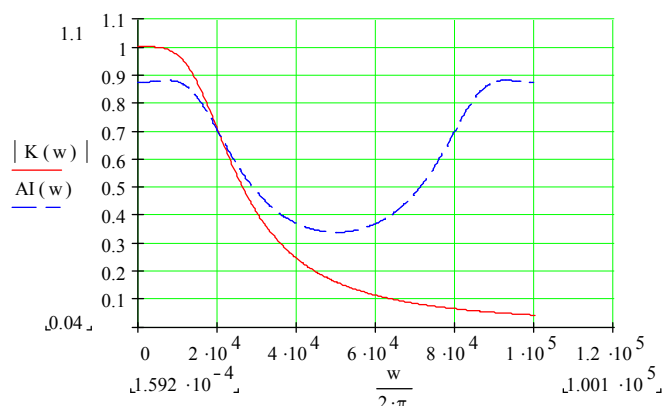
$$b_1 = \frac{2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot T}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot T + \omega_{cp}^2 \cdot T^2} = \frac{2 + \sqrt{2} \cdot (1.256)}{1 + \sqrt{2} \cdot (1.256) + (1.256)^2} \quad b_1 = 0.86706$$

$$b_2 = \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot T + \omega_{cp}^2 \cdot T^2} = \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \cdot (1.256) + (1.256)^2} \quad b_2 = -0.22955$$

Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу отображения дифференциалов



АЧХ ЦФ (пунктир) и фильтра-прототипа (сплошная)



5.3.3. Синтез ЦФ методом билинейного преобразования

Обычно, в билинейном преобразовании делается коррекция частоты. Это производится заменой $\omega_{cp} \rightarrow \omega_k$.

$$\omega_k = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(T \cdot \frac{\omega_{cp}}{2}\right) = \frac{2}{10^{-5}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1.256}{2}\right) = 1.453 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$p = \frac{2 \cdot z - 1}{T \cdot z + 1}, \quad \text{Тогда}$$

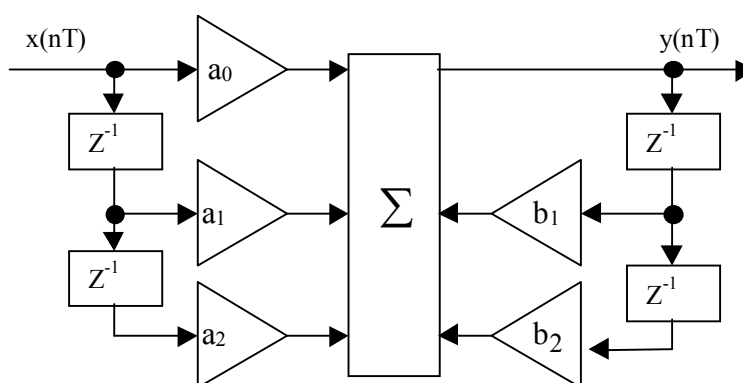
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\omega_k^2}{\frac{4}{T^2} \cdot \left(\frac{z-1}{1+z}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{1+z}\right) + \omega_k^2} = \frac{\omega_k^2 \cdot (1+z)^2}{\frac{4}{T^2} \cdot (z-1)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} \cdot (z-1) \cdot (1+z) + \omega_k^2 (1+z)^2} = \\ &= \frac{\omega_k^2 \cdot (1+2z+z^2)}{\frac{4}{T^2} \cdot (1-2z+z^2) + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} \cdot (z^2-1) + \omega_k^2 \cdot (1-2z+z^2)} = \\ &= \frac{\omega_k^2 \cdot (1+2z+z^2)}{\frac{4}{T^2} \cdot z^2 - \frac{8}{T^2} \cdot z + \frac{4}{T^2} + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} \cdot z^2 - \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} + \omega_k^2 \cdot z^2 + 2 \cdot \omega_k^2 \cdot z + \omega_k^2} = \\ &= \frac{\omega_k^2 \cdot T^2 (1+2z+z^2)}{(4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2) - (8-2 \cdot \omega_k^2 \cdot T^2)z^{-1} + (4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2)z^{-2}} = \\ &= \frac{\omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} \cdot (1+2z^{-1}+z^{-2}) = \\ &= 1 - \frac{8-2 \cdot \omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} \cdot z^{-1} + \frac{4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} \cdot z^{-2} \\ a_0 &= \frac{\omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} = \frac{(1.453)^2}{4+2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2} \quad a_0 = 0.20657. \\ a_1 &= \frac{2\omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} = \frac{2 \cdot (1.453)^2}{4+2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2} \quad a_1 = 0.41314. \\ a_2 &= \frac{\omega_k^2 \cdot T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} = \frac{(1.453)^2}{4+2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2} \quad a_2 = 0.20657. \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{8 - 2\omega_k^2 \cdot T^2}{4 + 2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} = \frac{8 - 2 \cdot (1.453)^2}{4 + 2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2} \quad b_1 = 0.36953.$$

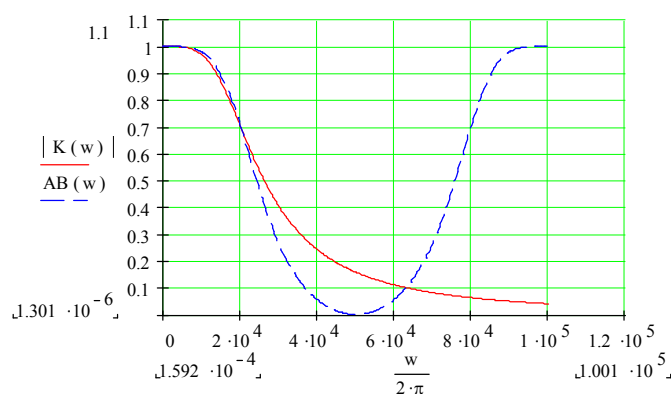
$$b_2 = -\frac{4 - 2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2}{4 + 2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 \cdot T^2} = -\frac{4 - 2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2}{4 + 2\sqrt{2} \cdot (1.453) + (1.453)^2} \quad b_2 = -0.19582.$$

Таким образом, получили системную функцию $H(z)$: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$.

Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу билинейного преобразования



АЧХ ЦФ (пунктир) и фильтра-прототипа (сплошная)



5.3.4. Синтез ЦФ по методу Z-форм

$$K(p) = \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot p + \omega_{cp}^2} = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot p^{-2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot p^{-1} + \omega_{cp}^2 \cdot p^{-2}},$$

$$p^{-1} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}, \quad p^{-2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2 + 10 \cdot z + 1}{(z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2 + 10 \cdot z + 1}{(z-1)^2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2 + 10 \cdot z + 1}{(z-1)^2}} = \\
&= \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot (z^2 + 10 \cdot z + 1)}{(z-1)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} \cdot (z+1) \cdot (z-1) + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot (z^2 + 10 \cdot z + 1)} = \\
&= \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot (z^2 + 10 \cdot z + 1)}{z^2 - 2z + 1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} \cdot z^2 - \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot z^2 + 10\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot z + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} = \\
&= \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot (z^{-2} + 10 \cdot z^{-1} + 1)}{\left(1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}\right) - \left(2 - 10 \cdot \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}\right) \cdot z^{-1} + \left(1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}\right) \cdot z^{-2}} = \\
&= \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12} \cdot (z^{-2} + 10 \cdot z^{-1} + 1)}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} = \\
&= \frac{1 - \frac{2 - 10 \cdot \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} \cdot z^{-1} + \frac{1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} \cdot z^{-2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}
\end{aligned}$$

Таким образом, получили системную функцию $H(z)$: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$

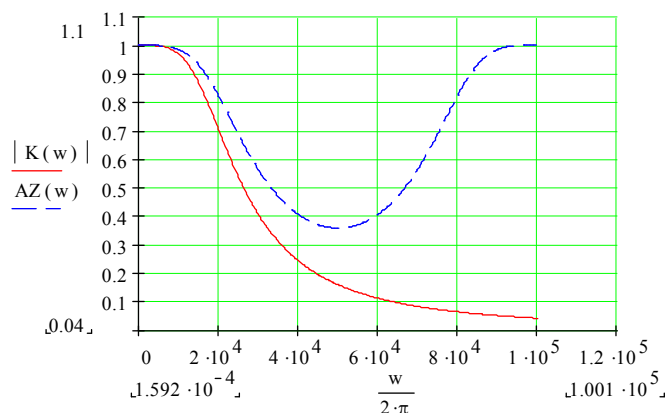
$$a_0 = a_2 = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} = \frac{\frac{(1.256)^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1.256}{2}\right) + \frac{(1.256)^2}{12}} = 0.06514;$$

$$a_1 = 10 \cdot a_0 = 0.6514;$$

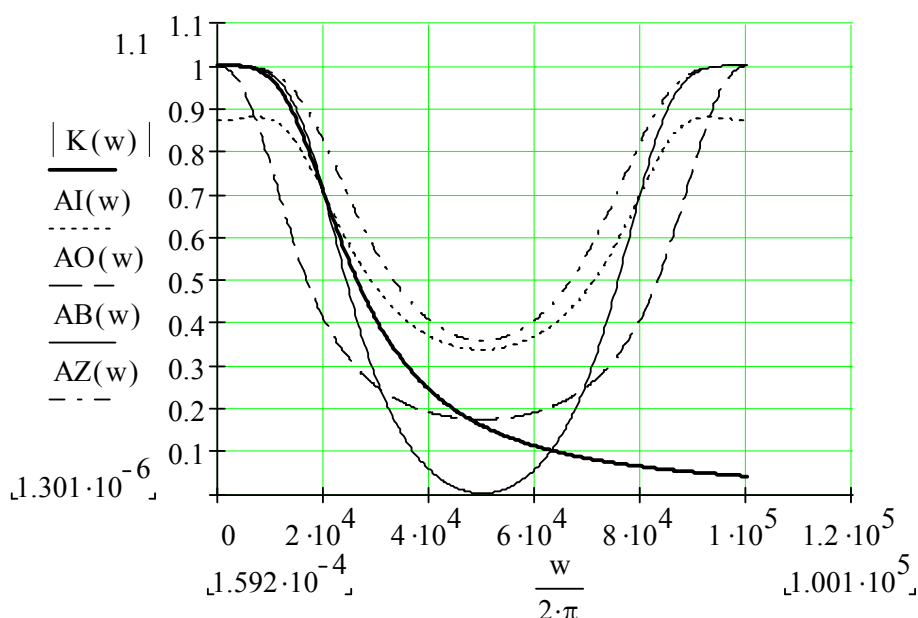
$$b_1 = \frac{2 - 10 \cdot \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} = \frac{2 - 10 \cdot \frac{(1.256)^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1.256}{2}\right) + \frac{(1.256)^2}{12}} \quad b_1 = 0.33861$$

$$b_2 = -\frac{1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \frac{T}{2} + \omega_{cp}^2 \cdot \frac{T^2}{12}} = -\frac{1 - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1.256}{2}\right) + \frac{(1.256)^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1.256}{2}\right) + \frac{(1.256)^2}{12}} \quad b_2 = -0.1203$$

Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу Z-форм, аналогична структурной схеме ЦФ, рассчитанного по методу билинейного преобразования.



АЧХ ЦФ (пунктир) и фильтра-прототипа (сплошная)



$|K(w)|$ - аналоговый фильтр; $AI(w)$ – ЦФ инвариантным методом; $AO(w)$ – ЦФ методом отображения дифференциалов ; $AB(w)$ – ЦФ билинейным методом ; $AZ(w)$ – ЦФ методом Z – форм

5.3.5. Преобразование частотных свойств ЦФ

5.3.5.1. Преобразование ФНЧ в ФНЧ1

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$, $a_1 = 0.6514$, $a_2 = 0.06514$, $b_1 = 0.33861$, $b_2 = -0.1203$.

Для преобразования делаем замену:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}, \text{ где } \alpha = \frac{\sin\left\{\left(\frac{[\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}}]}{2}\right) \cdot T\right\}}{\sin\left\{\left(\frac{[\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}}]}{2}\right) \cdot T\right\}} = -0,30902 \text{ т.к.}$$

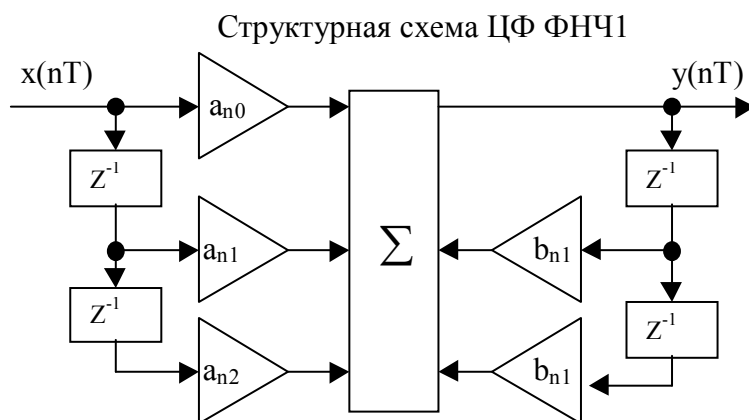
$T = 10^{-5}$ с. - период дискретизации.

$\Theta_{\text{cp}} = 2 \cdot \pi \cdot f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5$ - частота среза исходного ЦФ ФНЧ.

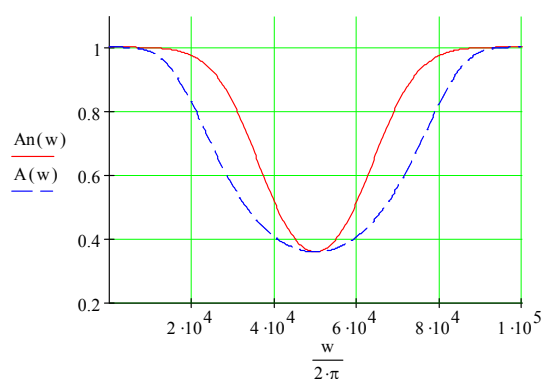
$\omega_{\text{cp}} = 1,5 \cdot \Theta_{\text{cp}} = 1,885 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФНЧ1.

Нахождение $H(z)$ для ФНЧ1:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} + a_2 \cdot \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}\right)^2}{1 - b_1 \cdot \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} - b_2 \cdot \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}\right)^2} = \\ &= \frac{a_0 \cdot (1 - \alpha \cdot z^{-1})^2 + a_1 \cdot (z^{-1} - \alpha) \cdot (1 - \alpha \cdot z^{-1}) + a_2 \cdot (z^{-1} - \alpha)^2}{(1 - \alpha \cdot z^{-1})^2 - b_1 \cdot (z^{-1} - \alpha) \cdot (1 - \alpha \cdot z^{-1}) - b_2 \cdot (z^{-1} - \alpha)^2} = \\ &= \frac{a_0 \cdot (1 - 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2 \cdot z^{-2}) + a_1 \cdot (z^{-1} - \alpha - \alpha \cdot z^{-2} + \alpha^2 \cdot z^{-1}) + a_2 \cdot (z^{-2} - 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2)}{(1 - 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2 \cdot z^{-2}) - b_1 \cdot (z^{-1} - \alpha - \alpha \cdot z^{-2} + \alpha^2 \cdot z^{-1}) - b_2 \cdot (z^{-2} - 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2)} = \\ &= \frac{(a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2) + z^{-1} \cdot (-2 \cdot \alpha \cdot a_0 + a_1 + a_1 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot a_2) + z^{-2} \cdot (a_0 \cdot \alpha^2 - a_1 \cdot \alpha + a_2)}{(1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2) - z^{-1} \cdot (2 \cdot \alpha + b_1 \cdot \alpha^2 + b_1 - 2 \cdot b_2 \cdot \alpha) - z^{-2} \cdot (-\alpha^2 - b_1 \cdot \alpha + b_2)} = \\ &= \frac{a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} + \frac{-2 \cdot \alpha \cdot a_0 + a_1 + a_1 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-1} + \frac{a_0 \cdot \alpha^2 - a_1 \cdot \alpha + a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-2} \\ &= \frac{a_{n0} + a_{n1} \cdot z^{-1} + a_{n2} \cdot z^{-2}}{1 - b_{n1} \cdot z^{-1} - b_{n2} \cdot z^{-2}}, \text{ где } a_{n0} = \frac{a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,30066, \\ a_{n1} &= \frac{-2 \cdot \alpha \cdot a_0 + a_1 + a_1 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,8757, a_{n2} = \frac{a_0 \cdot \alpha^2 - a_1 \cdot \alpha + a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,30066, \\ b_{n1} &= \frac{2 \cdot \alpha + b_1 \cdot \alpha^2 + b_1 - 2 \cdot \alpha \cdot b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = -0,35445, \quad b_{n2} = \frac{-\alpha^2 - b_1 \cdot \alpha + b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = -0,12257. \end{aligned}$$



АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ЦФ ФНЧ1 (сплошная)



5.3.5.2. Преобразование ФНЧ в ФВЧ

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$, $a_1 = 0.6514$, $a_2 = 0.06514$, $b_1 = 0.33861$, $b_2 = -0.1203$.

Для преобразования делаем замену:

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}}, \text{ где } \alpha = -\frac{\cos\left\{\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}}}{2}\right) \cdot T\right\}}{\cos\left\{\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}}}{2}\right) \cdot T\right\}} = -0,30902 \text{ т.к.}$$

$T = 10^{-5}$ с. - период дискретизации,

$\Theta_{\text{cp}} = 2 \cdot \pi \cdot f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5$ - частота среза исходного ЦФ ФНЧ,

$\omega_{\text{cp}} = \Theta_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФВЧ.

Нахождение $H(z)$ для ФВЧ: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}} + a_2 \cdot \left(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}} \right)^2}{1 - b_1 \cdot \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}} - b_2 \cdot \left(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}} \right)^2} =$

$$= \frac{a_0 \cdot (1 + \alpha \cdot z^{-1})^2 - a_1 \cdot (z^{-1} + \alpha) \cdot (1 + \alpha \cdot z^{-1}) + a_2 \cdot (z^{-1} + \alpha)^2}{(1 + \alpha \cdot z^{-1})^2 + b_1 \cdot (z^{-1} + \alpha) \cdot (1 + \alpha \cdot z^{-1}) - b_2 \cdot (z^{-1} + \alpha)^2} =$$

$$= \frac{a_0 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2 \cdot z^{-2}) - a_1 \cdot (z^{-1} + \alpha + \alpha \cdot z^{-2} + \alpha^2 \cdot z^{-1}) + a_2 \cdot (z^{-2} + 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2)}{1 + 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2 \cdot z^{-2} + b_1 \cdot (z^{-1} + \alpha + \alpha \cdot z^{-2} + \alpha \cdot z^{-1}) - b_2 \cdot (z^{-2} + 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + \alpha^2)} =$$

$$= \frac{(a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2) + z^{-1} \cdot (2 \cdot \alpha \cdot a_0 - a_1 - a_1 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot a_2) + z^{-2} \cdot (\alpha^2 \cdot a_0 - a_1 \cdot \alpha + a_2)}{(1 + \alpha \cdot b_1 - b_2 \cdot \alpha^2) + z^{-1} \cdot (2 \cdot \alpha + b_1 + \alpha^2 \cdot b_1 - 2 \cdot \alpha \cdot b_2) + z^{-2} \cdot (\alpha^2 + b_1 \cdot \alpha - b_2)} =$$

$$= \frac{\frac{a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot a_0 - a_1 - a_1 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-1} + \frac{a_0 \cdot \alpha^2 - a_1 \cdot \alpha + a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-2}}{1 + \frac{2 \cdot \alpha + b_1 \cdot \alpha^2 + b_1 - 2 \cdot \alpha \cdot b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-1} + \frac{\alpha^2 + b_1 \cdot \alpha - b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} \cdot z^{-2}}$$

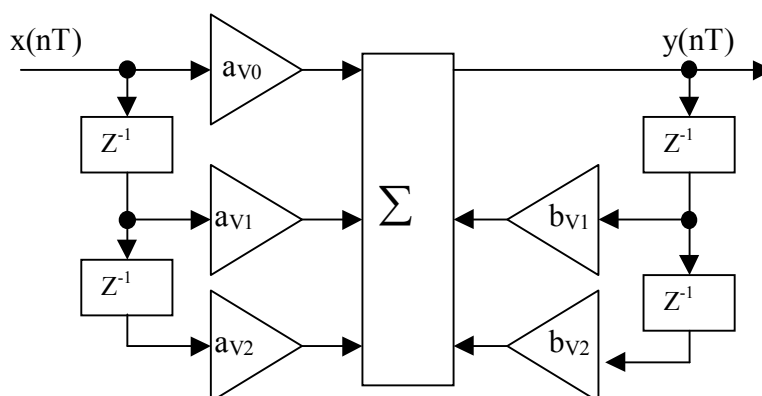
$= \frac{a_{v0} + a_{v1} \cdot z^{-1} + a_{v2} \cdot z^{-2}}{1 - b_{v1} \cdot z^{-1} - b_{v2} \cdot z^{-2}}$, где $a_{v0} = \frac{a_0 - a_1 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,30066$,

$a_{v1} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot a_0 - a_1 - a_1 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = -0,8757$,

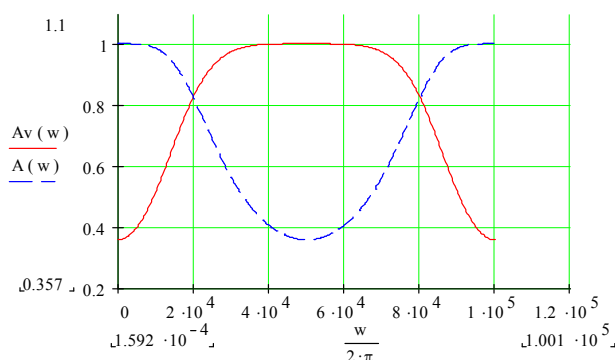
$a_{v2} = \frac{a_0 \cdot \alpha^2 - a_1 \cdot \alpha + a_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,30066$,

$b_{v1} = \frac{2 \cdot \alpha + b_1 \cdot \alpha^2 + b_1 - 2 \cdot \alpha \cdot b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = 0,35445$, $b_{v2} = \frac{\alpha^2 + b_1 \cdot \alpha - b_2}{1 + b_1 \cdot \alpha - b_2 \cdot \alpha^2} = -0,12257$.

Структурная схема ЦФ ФВЧ



АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ЦФ ФВЧ (сплошная)



5.3.5.3. Преобразование ФНЧ в ПФ

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$, $a_1 = 0.6514$, $a_2 = 0.06514$, $b_1 = 0.33861$, $b_2 = -0.1203$.

Для преобразования делаем замену:

$$z^{-1} \rightarrow - \frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)} \right\}}{\left\{ \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + 1 \right\}},$$

$$\alpha = \frac{\cos \left\{ \left[\frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2} \right] \cdot T \right\}}{\cos \left\{ \left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} \right] \cdot T \right\}} = 0,26103,$$

$$k = \operatorname{ctg} \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) \cdot T \right] \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_{\text{cp}} \cdot T}{2} \right) = 1,52625, \text{ где}$$

$\Theta_{\text{cp}} = 2 \cdot \pi \cdot f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5$ - частота среза исходного ЦФ ФНЧ, $T = 10^{-5}$ с,

$$\omega_1 = \frac{\Theta_{\text{cp}}}{\sqrt{2}} = 0,89 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega_2 = \Theta_{\text{cp}} \cdot \sqrt{2} = 1,776 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Нахождение $H(z)$ для ПФ: $H(z) =$

$$= \frac{a_0 + a_1 \cdot \left(- \frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)} \right\}}{\left\{ \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + 1 \right\}} \right) + a_2 \cdot \left(- \frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)} \right\}}{\left\{ \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + 1 \right\}} \right)^2}{1 - b_1 \cdot \left(- \frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)} \right\}}{\left\{ \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + 1 \right\}} \right) - b_2 \cdot \left(- \frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)} \right\}}{\left\{ \left[\frac{(k-1)}{(k+1)} \right] \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1} \right] \cdot z^{-1} + 1 \right\}} \right)^2}$$

В результате упрощений была получена системная функция ПФ:

$$H(z) = \frac{a_{pf0} + a_{pf1} \cdot z^{-1} + a_{pf2} \cdot z^{-2} + a_{pf3} \cdot z^{-3} + a_{pf4} \cdot z^{-4}}{1 - b_{pf1} \cdot z^{-1} - b_{pf2} \cdot z^{-2} - b_{pf3} \cdot z^{-3} - b_{pf4} \cdot z^{-4}},$$

$$\text{Где } a_{pf0} = \frac{a_2 + a_1 + a_0 + 2 \cdot a_0 \cdot k + a_0 \cdot k^2 - a_1 \cdot k^2 - 2 \cdot a_2 \cdot k + a_2 \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$a_{pf1} = \frac{-4 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot k + 4 \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot a_2 \cdot \alpha \cdot k^2 + 4 \cdot a_2 \cdot \alpha \cdot k}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$a_{pf2} = \frac{2 \cdot a_2 \cdot k^2 - 2 \cdot a_1 \cdot k^2 - 2 \cdot (a_0 + a_1 + a_2) + 2 \cdot a_0 \cdot k^2 + 4 \cdot a_0 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 - 4 \cdot a_1 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 + 4 \cdot a_2 \cdot \alpha^2 \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2}$$

$$a_{pf3} = \frac{4 \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot a_2 \cdot \alpha \cdot k - 4 \cdot a_2 \cdot \alpha \cdot k^2 + 4 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot k - 4 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$a_{pf4} = \frac{-2 \cdot a_0 \cdot k + a_2 + a_1 + a_0 + a_0 \cdot k^2 - a_1 \cdot k^2 + 2 \cdot a_2 \cdot k + a_2 \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$b_{pf1} = -\frac{-4 \cdot \alpha \cdot k - 4 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot b_1 \cdot \alpha \cdot k^2 + 4 \cdot b_2 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot b_2 \cdot \alpha \cdot k}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$b_{pf2} = -\frac{2 \cdot b_1 \cdot k^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 + 4 \cdot b_1 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 - 4 \cdot b_2 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 + 2 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 2 \cdot k^2 - 2 - 2 \cdot b_2 \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

$$b_{pf3} = -\frac{4 \cdot \alpha \cdot k - 4 \cdot b_1 \cdot \alpha \cdot k^2 + 4 \cdot b_2 \cdot \alpha \cdot k + 4 \cdot b_2 \cdot \alpha \cdot k^2 - 4 \cdot \alpha \cdot k^2}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2},$$

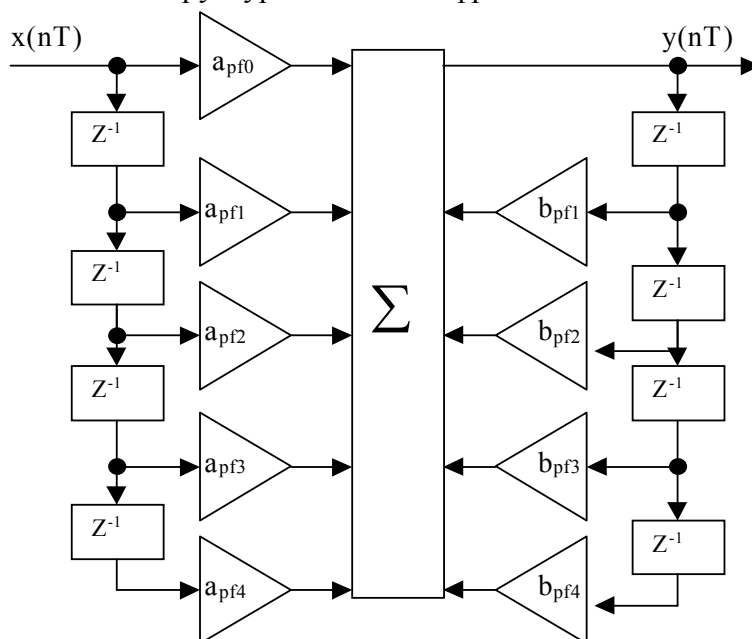
$$b_{pf4} = -\frac{-b_2 \cdot k^2 - 2 \cdot b_2 \cdot k + b_1 \cdot k^2 - b_2 + k^2 - 2 \cdot k + 1 - b_1}{1 + 2 \cdot k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 \cdot k^2 + 2 \cdot b_2 \cdot k - b_2 \cdot k^2}.$$

Численные значения коэффициентов цифрового ПФ:

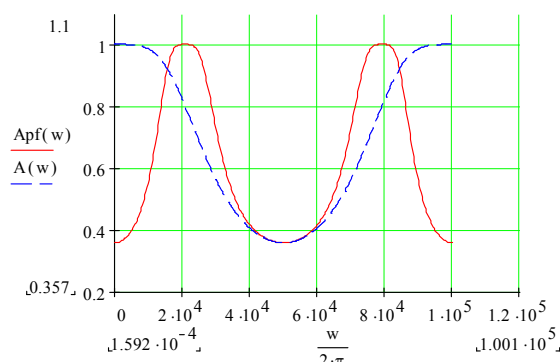
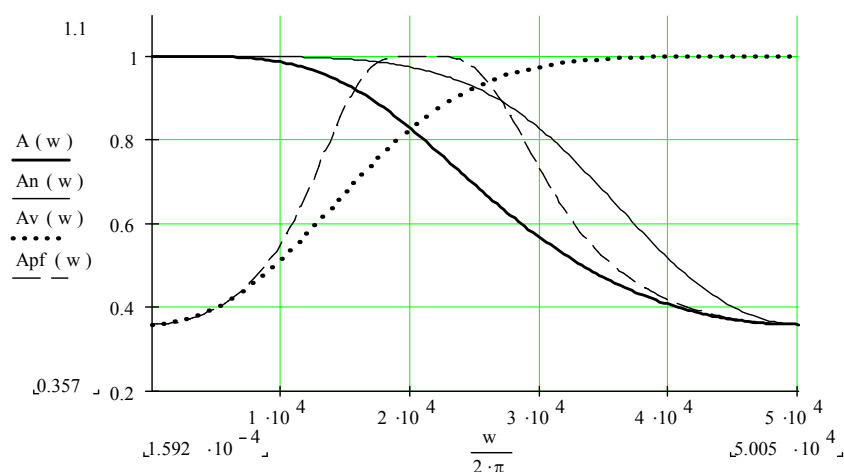
$$a_{pf0} = -0,06296, a_{pf1} = 0,18462, a_{pf2} = -0,62954, a_{pf3} = 0,18462, a_{pf4} = -0,06296,$$

$$b_{pf1} = 0,72106, b_{pf2} = -0,89722, b_{pf3} = 0,31266, b_{pf4} = -0,21773$$

Структурная схема цифрового ПФ



АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ПФ (сплошная)

A(w)-АЧХ исходного ЦФ, An(w)-АЧХ ЦФНЧ, Av(w)-АЧХ ЦФВЧ (точки),
Apf(w)-АЧХ ПФ (пунктир)

5.3.6. Нахождение нулей и полюсов

Возьмем системную функцию ЦФ, синтезированного по методу Z-форм

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$; $a_1 = 0.6514$; $a_2 = 0.06514$; $b_1 = 0.33861$; $b_2 = -0.1203$..

Чтобы найти значения нулей и полюсов, перейдем к положительным

степеням z :
$$H(z) = \frac{0,06514 \cdot z^2 + 0,6514 \cdot z + 0,06514}{z^2 - 0,33861 \cdot z + 0,1203}.$$

Найдем значения полюсов, для этого приравняем знаменатель системной функции к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение: $z^2 - 0,33861 \cdot z + 0,1203 = 0$, найдем корни этого уравнения:

$$z_1 = \frac{0,33861 + \sqrt{(0,33861)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,1203}}{2} = 0,169 + i \cdot 0,303,$$

$$z_2 = \frac{0,33861 - \sqrt{(0,33861)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,1203}}{2} = 0,169 - i \cdot 0,303.$$

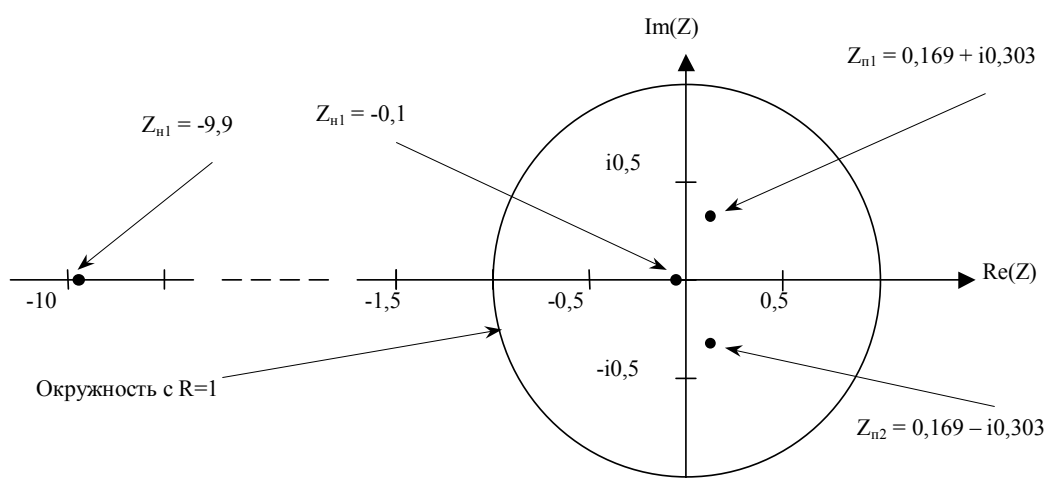
Значения полюсов: $z_{п1} = 0,169 + i \cdot 0,303$ и $z_{п2} = 0,169 - i \cdot 0,303$.

Для нахождения значения нулей вынесем общий множитель 0,06514 из числителя, чтобы получить характеристическое уравнение: $z^2 + 10 \cdot z + 1 = 0$, корни этого уравнения:

$$z_1 = \frac{-10 + \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = -0,101, \quad z_2 = \frac{-10 - \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = -9,89.$$

Значения нулей: $z_{н1} = -0,101$ и $z_{н2} = -9,89$.

Картина нулей и полюсов на комплексной Z-плоскости



5.3.7. Проверка условия устойчивости фильтра

Устойчивость фильтра определяется значениями коэффициентов b_1 и b_2 .

$$z^2 - b_1 \cdot z - b_2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $z_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2}$, $z_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2}$.

Фильтр устойчив, когда $|Z| \leq 1$ или $1 \geq |z_{1,2}|$, т.е. $1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2} \right|$.

Рассмотрим два случая:

7.1. Когда дискриминант больше либо равен нулю $b_1^2 + 4 \cdot b_2 \geq 0$, отсюда:

$$1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2} \right| \Rightarrow 2 \geq \left| b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2} \right| \Rightarrow 2 \geq \pm \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2} \right) \text{ в ре-}$$

зультате решения этого неравенства получаем четыре попарно равных неравенства: $1 - b_1 \geq b_2$, $1 + b_1 \geq b_2$.

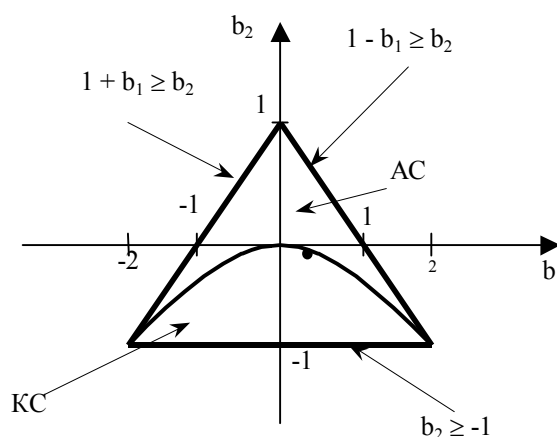
7.2. Когда дискриминант меньше нуля $b_1^2 + 4 \cdot b_2 < 0$, то:

$$1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2} \right| \Rightarrow 1 \geq \left| \frac{b_1 \pm j \cdot \frac{\sqrt{-(b_1^2 + 4 \cdot b_2)}}{2}}{2} \right| \Rightarrow 1 \geq \left(\frac{b_1^2}{4} + \frac{-b_1^2 - 4 \cdot b_2}{4} \right)$$

$$1 \geq -b_2 \Rightarrow b_2 \geq -1.$$

По полученным неравенствам построим треугольник устойчивости:

Треугольник устойчивости



Так как точка с координатами (b_1, b_2) внутри треугольника устойчивости, то ЦФ ФНЧ является устойчивым.

Колебательные системы (КС): $b_1^2 + 4 \cdot b_2 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq \pm j \cdot 2 \cdot \sqrt{b_2}$.

Апериодические системы (АС): $b_1^2 + 4 \cdot b_2 < 0 \Rightarrow b_1 < \pm j \cdot 2 \cdot \sqrt{b_2}$.

Судя по треугольнику устойчивости, данный ЦФ ФНЧ является колебательной системой.

5.3.8. Расчет первых 10 отсчетов импульсной и переходной характеристик, выражение для системной функции и АЧХ ЦФ

Выражение для передаточной функции фильтра рассчитанного по методу Z-форм

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$; $a_1 = 0.6514$; $a_2 = 0.06514$; $b_1 = 0.33861$; $b_2 = -0.1203$.

Расчет АЧХ для фильтра синтезированного по методу Z-форм:

$$A(\omega) = |H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))|,$$

В системной функции $H(z)$ производится замена $z^{-1} \rightarrow \exp(-j\omega T)$:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot T) + a_2 \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot T)}{1 - b_1 \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot T) - b_2 \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot T)},$$

разложение экспоненты через синусы и косинусы:

$$\begin{aligned} H(\exp(j \cdot \omega \cdot T)) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot (\cos(\omega \cdot T) - j \cdot \sin(\omega \cdot T)) + a_2 \cdot (\cos(2 \cdot \omega \cdot T) - j \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{1 - b_1 \cdot (\cos(\omega \cdot T) - j \cdot \sin(\omega \cdot T)) - b_2 \cdot (\cos(2 \cdot \omega \cdot T) - j \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))} = \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) - j \cdot (a_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) + j \cdot (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))} = \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} + \\ &+ \frac{(a_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} + \\ &+ j \cdot \frac{(a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} - \\ &- j \cdot \frac{(a_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} = \\ &= \operatorname{Re}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))) + j \cdot \operatorname{Im}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))), \text{ где} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))) &= \frac{(a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} + \\ &+ \frac{(a_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))) &= \frac{(a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2} - \\ &- \frac{(a_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T)) \cdot (1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))}{(1 - b_1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - b_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T))^2 + (b_1 \cdot \sin(\omega \cdot T) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot T))^2}. \end{aligned}$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = |H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))| = \sqrt{(\operatorname{Re}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))))^2 + (\operatorname{Im}(H(\exp(j \cdot \omega \cdot T))))^2}.$$

С помощью передаточной функции запишем разностное уравнение:

$$y(nT) = [a_0 \cdot x(nT) + a_1 \cdot x(nT - T) + a_2 \cdot x(nT - 2 \cdot T)] + b_1 \cdot y(nT - T) + b_2 \cdot y(nT - 2 \cdot T), \quad n \geq 0.$$

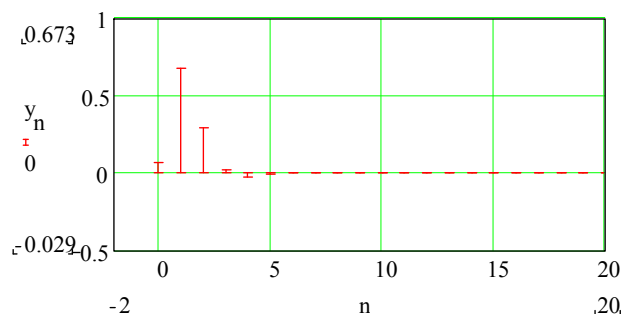
Для расчета первых 10 отсчетов импульсной характеристики производится замена: $x(nT) \rightarrow \delta(nT)$, где $\delta(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$,

$$y(nT) = [a_0 \cdot \delta(nT) + a_1 \cdot \delta(nT - T) + a_2 \cdot \delta(nT - 2 \cdot T)] + b_1 \cdot y(nT - T) + b_2 \cdot y(nT - 2 \cdot T).$$

Численные значения первых 10 отсчетов импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0,06514; \quad y(1) = 0,67346; \quad y(2) = 0,28534; \quad y(3) = 0,0156; \\ y(4) &= -0,02904; \quad y(5) = -0,01171; \quad y(6) = -0,47 \cdot 10^{-3}; \quad y(7) = 1,25 \cdot 10^{-3}; \\ y(8) &= 0,48 \cdot 10^{-3}; \quad y(9) = 0,012 \cdot 10^{-3}; \quad y(10) = -0,054 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

График импульсной характеристики



Для расчета первых 10 отсчетов переходной характеристики в разностном уравнении производится замена: $x(nT) \rightarrow U(nT)$,

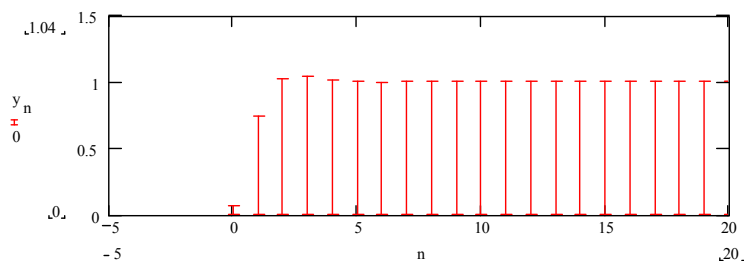
$$\text{где } U(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

$$y(nT) = [a_0 \cdot U(nT) + a_1 \cdot U(nT - T) + a_2 \cdot U(nT - 2 \cdot T)] + b_1 \cdot y(nT - T) + b_2 \cdot y(nT - 2 \cdot T).$$

Численные значения первых 10 отсчетов переходной характеристики:

$$y(0) = 0,065; y(1) = 0,739; y(2) = 1,024; y(3) = 1,04; y(4) = 1,01; \\ y(5) = 0,999; y(6) = 0,998; y(7) = 1; y(8) = 1; y(9) = 1; y(10) = 1.$$

График переходной характеристики

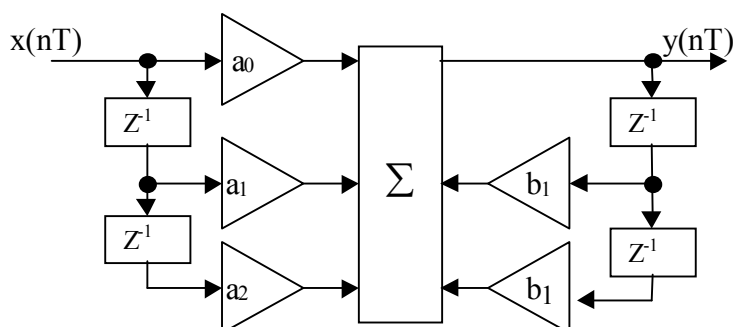


5.3.9. Структурная схема фильтра для прямой и канонической форм реализации

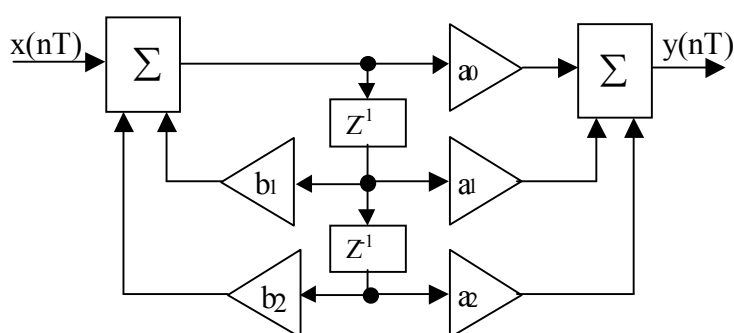
Системная функция ЦФ ФНЧ, синтезированного в пункте 4:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}.$$

Структурная схема фильтра для прямой формы реализации



Структурная схема фильтра для канонической формы реализации



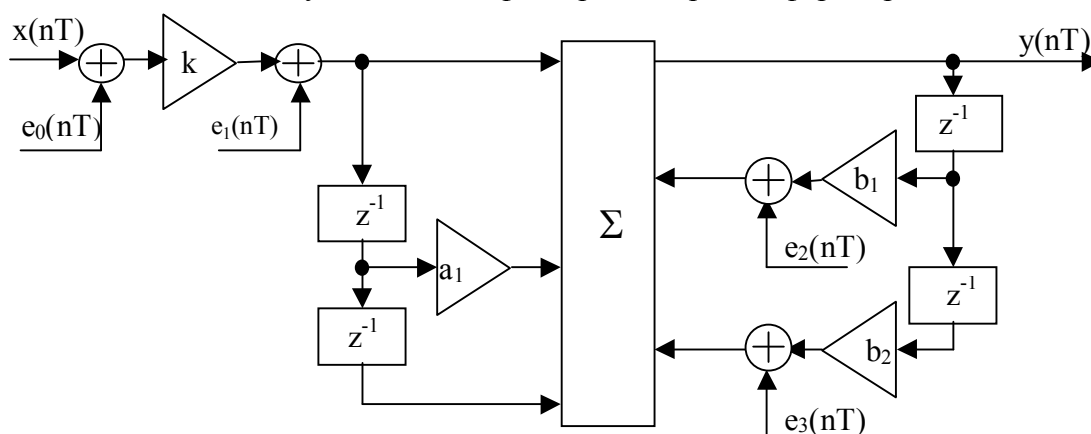
5.3.10. Алгоритм обработки фильтра для прямой и канонической форм реализации и объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала

Исходя из структурной схемы фильтра для прямой и канонической форм реализации следует записать разностное уравнение и пояснить алгоритм формирования выходного сигнала по каждому из тактов его обработки.

5.3.11. Расчет среднеквадратического значения шума квантования всех источников

Т.к. $a_0 = a_2$, $a_1 = 10 \cdot a_2$, то для уменьшения $\sigma_{\Sigma_{\text{вых}}}^2$ схему ЦФ можно упростить. Эквивалентная шумовая схема фильтра для прямой формы реализации учитывая то что $a_0 = 1$; $a_2 = 1$ т.е. умножения не происходит, и то что $a_1 = 10$ при умножении на целое число шумы не вносятся:

Эквивалентная шумовая схема фильтра для прямой формы реализации



Где - $e_0(nT)$ это шумы АЦП, $e_1(nT)$ это шумы вносимые при умножении на коэффициент k_0 , $e_2(nT)$ и $e_3(nT)$ это шумы вносимые при умножении на коэффициенты b_1 и b_2 соответственно. Нахождение среднеквадратического значения шума АЦП:

$$\sigma_{0\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{0\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint H_0(z) \cdot H_0(z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot dz = \sigma_{0\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \varphi_0(z) dz .$$

$$H_0(z) = k_0 \cdot \frac{1 + a_1 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} = k_0 \cdot \frac{z^2 + a_1 \cdot z + 1}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2} ,$$

$$H_0(z^{-1}) = k_0 \cdot \frac{z^{-2} + a_1 \cdot z^{-1} + 1}{z^{-2} - b_1 \cdot z^{-1} - b_2} = k_0 \cdot \frac{1 + a_1 \cdot z + z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} ,$$

$$\varphi_0(z) = H_0(z) \cdot H_0(z^{-1}) \cdot z^{-1} = k_0 \cdot \frac{z^2 + a_1 \cdot z + 1}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2} \cdot k_0 \cdot \frac{1 + a_1 \cdot z + z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \cdot z^{-1} =$$

$$= k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{(1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2) \cdot (z^2 - b_1 \cdot z - b_2)} = k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')},$$

где z_1 и z_2 корни характеристического уравнения $z^2 - b_1 \cdot z - b_2 = 0$, а z_1' и z_2'

корни характеристического уравнения $z^2 + \frac{b_1}{b_2} \cdot z - \frac{1}{b_2} = 0$.

$$z_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2}; z_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}{2}; z_1' = \frac{2}{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}}; z_2' = \frac{2}{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4 \cdot b_2}} .$$

То есть $z_1 = \frac{1}{z_1'}$, $z_2 = \frac{1}{z_2'}$.

$$\sigma_{0\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{0\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')} \cdot dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{0\text{ВХ}}^2 \cdot \left(\lim_{z \rightarrow 0} \left(k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1)' \cdot (z - z_2)'} \cdot (z - 0) \right) + \right. \\
&\quad + \lim_{z \rightarrow z_1} \left(k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1)' \cdot (z - z_2)'} \cdot (z - z_1) \right) + \\
&\quad \left. + \lim_{z \rightarrow z_2} \left(k_0^2 \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1)' \cdot (z - z_2)'} \cdot (z - z_2) \right) \right).
\end{aligned}$$

В результате преобразования и подстановки, получаем:

$$\sigma_{0\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{0\text{ВХ}}^2 \cdot k_0^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}.$$

$$\sigma_{0\text{ВХ}}^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad \Delta = 2^{-C}, \quad \text{где } C \text{ разрядность АЦП.}$$

Принимаем разрядность АЦП равной 8. Тогда: $\sigma_{0\text{ВХ}}^2 = \frac{(2^{-8})^2}{12} = 1,272 \cdot 10^{-6}$,

отсюда $\sigma_{0\text{ВЫХ}}^2 = 6,872 \cdot 10^{-7}$.

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на k_0 :

$$\sigma_{1\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{1\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint H_1(z) \cdot H_1(z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot dz = \sigma_{1\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \varphi_1(z) dz.$$

$$H_1(z) = \frac{1 + a_1 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} = \frac{z^2 + a_1 \cdot z + 1}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2},$$

$$H_1(z^{-1}) = \frac{z^{-2} + a_1 \cdot z^{-1} + 1}{z^{-2} - b_1 \cdot z^{-1} - b_2} = \frac{1 + a_1 \cdot z + z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2},$$

$$\varphi_1(z) = H_1(z) \cdot H_1(z^{-1}) \cdot z^{-1} = \frac{z^2 + a_1 \cdot z + 1}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot z + z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \cdot z^{-1} =$$

$$= \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{(1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2) \cdot (z^2 - b_1 \cdot z - b_2)} \cdot z^{-1} = \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1)' \cdot (z - z_2)'}$$

Произведя расчет аналогичный расчету среднеквадратического значения шума АЦП, запишем аналитическое выражение для среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на k_0 :

$$\sigma_{1\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{1\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}.$$

Среднеквадратическое значение шума вносимого при умножении на k_0 в численном виде: $\sigma_{1\text{ВХ}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6}$, отсюда $\sigma_{1\text{ВЫХ}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}$.

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на коэффициент b_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint H_2(z) \cdot H_2(z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot dz = \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \varphi_2(z) dz. \\ H_2(z) &= \frac{1}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2}, \\ H_2(z^{-1}) &= \frac{z^{-2}}{z^{-2} - b_1 \cdot z^{-1} - b_2} = \frac{1}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2}, \\ \varphi_2(z) &= H_2(z) \cdot H_2(z^{-1}) \cdot z^{-1} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2} \cdot \frac{1}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \cdot z^{-1} = \\ &= \frac{z}{(1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2) \cdot (z^2 - b_1 \cdot z - b_2)} = \frac{z}{z_1 \cdot z_2 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')}. \\ \sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \frac{z}{z_1 \cdot z_2 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')} \cdot dz = \\ &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \cdot \left(\lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{z}{z_1 \cdot z_2 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')} \cdot (z - z_1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{z \rightarrow z_2} \left(\frac{z}{z_1 \cdot z_2 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')} \cdot (z - z_2) \right) \right).\end{aligned}$$

В результате преобразования и подстановки, получаем:

$$\sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{(b_2 - 1)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}$$

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на коэффициент b_1 в численном виде:

$$\sigma_{2\text{ВХ}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6}, \text{ отсюда: } \sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 = 1,42 \cdot 10^{-6}.$$

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на коэффициент b_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_{3\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{3\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint H_3(z) \cdot H_3(z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot dz = \sigma_{3\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \varphi_3(z) dz. \\ \varphi_3(z) &= H_3(z) \cdot H_3(z^{-1}) \cdot z^{-1} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2} \cdot \frac{1}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \cdot z^{-1}\end{aligned}$$

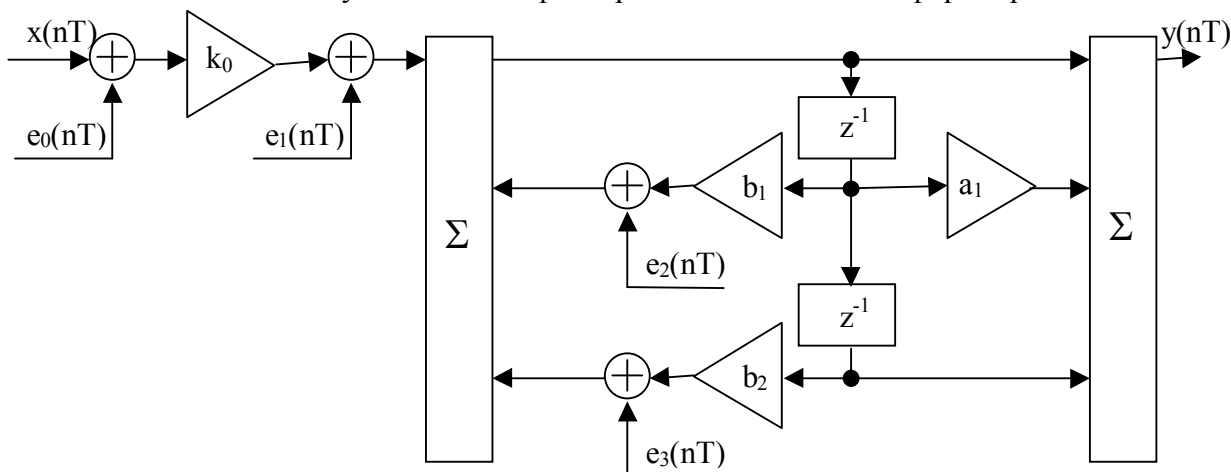
Вывод аналитического выражения для $\sigma_{3\text{ВЫХ}}^2$ коэффициента b_2 и расчет численного его значения аналогичен, приведенному выше для коэффициента b_1 .

$$\sigma_{3\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{3\text{ВХ}}^2 \cdot \frac{(b_2 - 1)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}$$

Среднеквадратическое значение шума вносимого при умножении на коэффициент b_2 в численном виде:

$$\sigma_{3_{\text{ВХ}}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6}, \text{ отсюда } \sigma_{3_{\text{ВЫХ}}}^2 = 1,42 \cdot 10^{-6}.$$

Эквивалентная шумовая схема фильтра для канонической формы реализации



Нахождение аналитического выражения для $\sigma_{0_{\text{ВЫХ}}}^2$, вносимого со стороны АЦП, и $\sigma_{1_{\text{ВЫХ}}}^2$, вносимого при умножении на коэффициент k_0 , аналогично проведенному выше для прямой формы реализации ЦФ. Численные значения также будут совпадать.

$$\sigma_{0_{\text{ВЫХ}}}^2 = \sigma_{0_{\text{ВХ}}}^2 \cdot k_0^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)},$$

$$\sigma_{1_{\text{ВЫХ}}}^2 = \sigma_{1_{\text{ВХ}}}^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)},$$

$$\sigma_{0_{\text{ВЫХ}}}^2 = 6,872 \cdot 10^{-7}, \quad \sigma_{1_{\text{ВЫХ}}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}.$$

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на коэффициент b_1 :

$$\sigma_{2_{\text{ВЫХ}}}^2 = \sigma_{2_{\text{ВХ}}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint H_2(z) \cdot H_2(z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot dz = \sigma_{2_{\text{ВХ}}}^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \varphi_2(z) dz.$$

$$\varphi_2(z) = \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{(1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2) \cdot (z^2 - b_1 \cdot z - b_2)} \cdot z^{-1} = \frac{(1 + a_1 \cdot z + z^2)^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1') \cdot (z - z_2')}$$

$$\sigma_{2_{\text{ВЫХ}}}^2 = \sigma_{2_{\text{ВХ}}}^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}$$

$$\text{В численном виде: } \sigma_{2_{\text{ВХ}}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6}, \quad \sigma_{2_{\text{ВЫХ}}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}.$$

Нахождение среднеквадратического значения шума вносимого при умножении на коэффициент b_2 аналогично:

$$\sigma_{3_{\text{ВЫХ}}}^2 = \sigma_{3_{\text{ВХ}}}^2 \cdot \frac{(-2 \cdot b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 + a_1^2 \cdot b_2 - a_1^2 + 2 \cdot b_2^2)}{(1 + b_2) \cdot (b_1 + b_2 - 1) \cdot (b_1 - b_2 + 1)}.$$

В численном виде: $\sigma_{3_{\text{ВХ}}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6}$, отсюда $\sigma_{3_{\text{ВЫХ}}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}$.

5.3.12. Изменение значений нулей, полюсов и частотной характеристики при изменении коэффициентов ЦФ

Системная функция ЦФ ФНЧ синтезированного в пункте 4:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}},$$

где $a_0 = 0.06514$; $a_1 = 0.6514$; $a_2 = 0.06514$; $b_1 = 0.33861$; $b_2 = -0.1203$.

а) $a_1 = 0$; системная функция имеет вид: $H(z) = \frac{a_0 + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$,

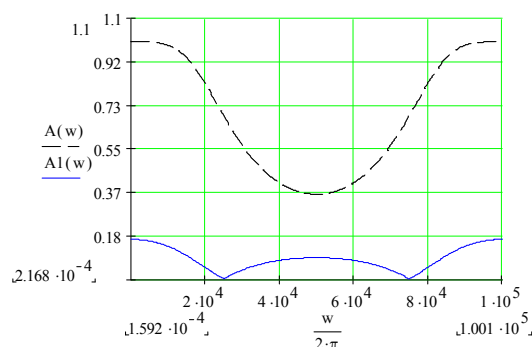
Чтобы найти значения нулей и полюсов, перейдем к положительным степеням z :

Значения полюсов не изменяются т.к. не изменяется знаменатель $H(z)$.

Найдем значения нулей:

т.к. $a_0 = a_2$, то $z^2 + 1 = 0$, т.е. $z_{н1} = \sqrt{-1} = j$, $z_{н2} = -\sqrt{-1} = -j$.

АЧХ исходного ЦФ - пунктир, АЧХ ЦФ, при $a_1 = 0$ - сплошная



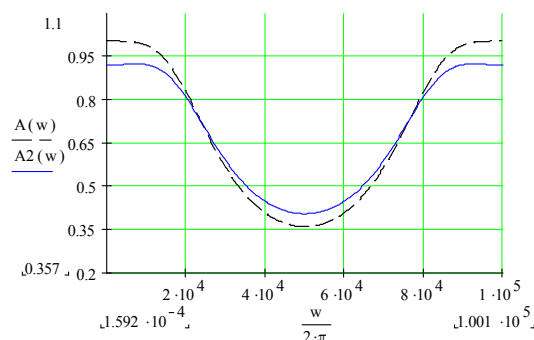
б) $a_2 = 0$; системная функция имеет вид: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$,

Значения полюсов не изменяются т.к. не изменяется знаменатель $H(z)$.

Найдем значения нулей: т.к. $10a_0 = a_1$, то $z^2 + 10 \cdot z = z \cdot (z + 10) = 0$,

Получили значения нулей: $z_{н1} = 0$, $z_{н2} = -10$.

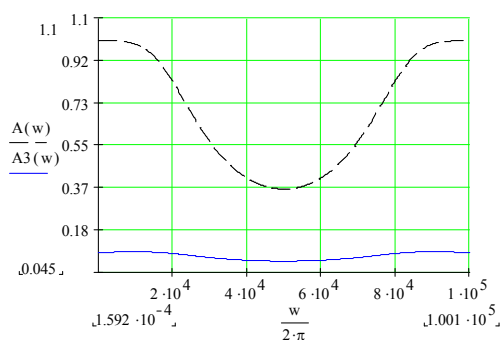
АЧХ исходного ЦФ - пунктир, АЧХ ЦФ при $a_2 = 0$ - сплошная



в) $a_1 = a_2 = 0$; системная функция имеет вид: $H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$,

Значения полюсов не изменяются т.к. не изменяется знаменатель $H(z)$.
Найдем значения нулей: $z^2 = 0$, получили значения нулей: $z_{H1} = 0$, $z_{H2} = 0$.

АЧХ исходного ЦФ - пунктир, АЧХ ЦФ при $a_1 = a_2 = 0$ - сплошная



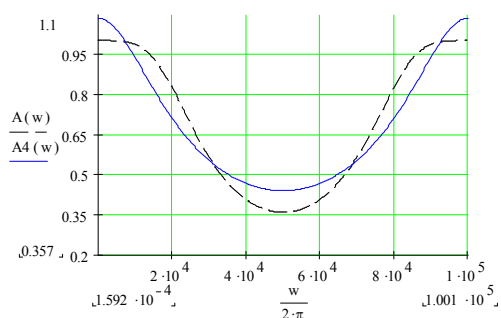
г) $b_2 = a_2 = 0$; системная функция имеет вид: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}}$.

Найдем значения полюсов: Для этого приравняем знаменатель системной функции к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение: $z - 0,33861 = 0$, Значение полюса: $z_{H1} = 0,33861$.

Найдем значения нулей: т.к. $10a_0 = a_1$, то $z^2 + 10 \cdot z = z \cdot (z + 10) = 0$,

Получили значения нулей: $z_{H1} = 0$, $z_{H2} = -10$.

АЧХ исходного ЦФ - пунктир, АЧХ ЦФ при $b_2 = a_2 = 0$ - сплошная



д) $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$; системная функция имеет вид: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_2 \cdot z^{-2}}$.

Найдем значения полюсов: Для этого приравняем знаменатель системной функции к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение: $z^2 + 0,1203 = 0$, Получили значения полюсов: $z_{п1} = j \cdot 0,347$, $z_{п2} = -j \cdot 0,347$
Значения нулей не изменятся.

АЧХ исходного ЦФ – пунктир, АЧХ ЦФ при $b_1 = 0$ – сплошная.

